.

CM 128 - Funções

Notas de Aula

PSE 2017

Departamento de Matemática - UFPR

Sumário

1 Conjuntos **4**
- 1.1 Aula 1 - Operações entre conjuntos 4
  - 1.1.1 Conjuntos 4
  - 1.1.2 União e Interseção 6
  - 1.1.3 Produto cartesiano 7
  - 1.1.4 Exercícios 8
- 1.2 Aula 2 - Os números racionais 10
  - 1.2.1 Os números naturais 10
  - 1.2.2 Números pares e números ímpares 11
  - 1.2.3 Equações 12
  - 1.2.4 Os números inteiros 13
  - 1.2.5 Números pares e ímpares 14
  - 1.2.6 Os números racionais 15
  - 1.2.7 Exercícios 16
- 1.3 Aula 3 - Os números irracionais 16
  - 1.3.1 Exercícios 16

2 Inequações de grau 1 . . . . . **19**
- 2.1 Aula 4 - Inequações 19
  - 2.1.1 Exercícios 19
- 2.2 Aula 5 - Inequações envolvendo quocientes 19
  - 2.2.1 Exercícios 19
- 2.3 Aula 6 - Inequações Modulares 20
  - 2.3.1 Exercícios 20

Introdução

O principal objetivo destas notas é fornecer aos estudantes *apenas um guia* para o curso Funções - CM 128 - ofertado pelo departamento de matemática da UFPR.
Recomendamos (fortemente) que os alunos busquem outros materiais para complementar seu estudo. Listamos no final do texto algumas boas referências para este fim.
Uma grande quantidade dos exercícios propostos neste texto foram inicialmente elaborados pelo prefessor Alexandre Trovon (UFPR) e vários outros pelo professor Lucas Pedroso (UFPR).
Por fim, lembramos ao leitor que este é um material ainda en construção, o qual pode apresentar erros de digitação e formatação. Sendo assim, ficaremos felizes em receber correções, sugestões e críticas.

Capítulo 1

Conjuntos

Resumo:

Nas primeiras aulas deste curso estudaremos alguns aspectos gereais sobre conjuntos, tais como relaçõe de pertinencia, inclusão e intersecção. Faremos ainda uma breve introdução sobre os principais conjuntos numéricos que serão abordados neste curso.

1.1 Aula 1 - Operações entre conjuntos

1. Relações de pertinencia e inclusão. Conjunto complementar;
2. União e interseção de conjuntos
3. Produto cartesiano

1.1.1 Conjuntos

Não será foco deste curso uma discussão formal sobre o conceito de *conjunto*. Para nossos fins a seguinte definição, dada por Georg Cantor (1845-1918), será suficiente:

Definição 1.1.1 (Conjunto) *Chama-se conjunto o agrupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto*

Ao longo desta disciplina (bem como ao longo do curso de matemática) estudam-se vários tipos de conjuntos, tais como, os numéricos, de pontos, de curvas, de funções, de triângulos.

Alguns exemplos são:

Exemplo 1.1.1

(a) O conjunto numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$;

(b) Conjunto das funções polinomiais, das funções trigonométricas;

(c) Gráficos de funções;

Definição 1.1.2 *Dado um conjunto A utilizaremos a notação $x \in A$ (lê-se x pertence a A) para indicar que x é um elemento de A.*

Exemplo 1.1.2

(a) $10 \in \mathbb{N}$, $-7 \in \mathbb{Z}$;

(b) Com respeito aos conjuntos $A = \{1, 2, 7, 9\}$, $B = \{1, 7\}$ e $C = \{9, 10\}$ temos:

- $1 \in A$, $2 \in A$, $7 \in A$ e $9 \in A$;
- $1 \in B$ e $7 \in B$;
- $9 \in C$ e $10 \in C$;

Observação 1.1.1

(a) Note que todos os elementos de B são também elementos de A;

(b) Existem elementos de A que não são elementos de B;

(c) Os conjuntos B e C não possuem elementos comuns. (O símbolo $\emptyset$ indica o conjunto vazio, ou seja, aquele que não possui elementos.)

Com base nestas observações introduzimos os seguintes conceitos:

Definição 1.1.3 *Sejam A e B conjuntos.*

(i) Dizemos que B é subconjunto de A (notação $B \subset A$) quando todo elemento de B for elemento de A;

(ii) Dizemos que B é subconjunto próprio de A (notação $B \subsetneq A$) quando $B \subset A$ e existe pelo menos um $x \in A$ tal que $x \notin B$;

(iii) Dizemos que os conjunto A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$;

(iv) Quando B é um subconjunto de A definimos o conjunto complementar B, em relação a A, como sendo aquele que contém todos os elementos que estão em A mas não em B e o denotamos por $A - B$, ou ainda, B_A^C. De modo mais preciso:

$$B_A^C = A - B = \{x \in A, \quad \textit{tais que} \quad x \notin B\}$$

Observação 1.1.2 *A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante ferramenta para a demonstração de alguns resultados. Vamos explorar este assunto mais adiante.*

Exemplo 1.1.3

Segue das definições acima e do exemplo anterior que:

- $B \subsetneq A$;
- $A - B = \{2, 9\}$;
- $A \neq B$;

Exemplo 1.1.4

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $0 \in A$;
- $3 \notin A$;
- $\{3,7\} \in A$;
- $\{\{3,7\}\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $7 \notin A$;
- $\{0,2\} \subset A$;
- $\{3\} \not\subset A$;

Observação 1.1.3 *Ao longo deste curso os alunos terão um primeiro contato formalização de conceitos matemáticos e demonstrações de proposições. Neste sentido recomendamos a leitura das seções 1.6 e 2.3 da referência [4]. Recomenda-se também a referência [1].*

1.1.2 União e Interseção

Exibimos agora duas operações entre conjuntos extremamente importantes:

Definição 1.1.4 *Sejam A e B conjuntos.*

(i) A união entre dois conjuntos A e B (notação $A \cup B$) é um novo conjunto que contém exatamente todos os elementos de A e todos os elementos B. Em símbolos:

$$A \cup B = \{x, \quad \textit{tais que} \quad x \in A, \quad \textit{ou} \quad x \in B\} \tag{1.1}$$

(ii) A interseção entre os conjuntos A e B (notação $A \cap B$) é um novo conjunto que contém exatamente os elementos comuns a A e B. Em símbolos:

$$A \cap B = \{x, \quad \textit{tais que} \quad x \in A, \quad \textit{e} \quad x \in B\}. \tag{1.2}$$

Exemplo 1.1.5 *Sejam A, B e C os conjuntos $A = \{1,5,7,9\}$, $B = \{1,7,10\}$ e $C = \{8,10\}$.*

- $A \cup B = \{1,5,7,9,10\}$;
- $A \cap B = \{1,7\}$;
- $B \cup C = \{1,5,7,8,9,10\}$;
- $B \cap C = \emptyset$;

Proposição 1.1.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto U.*

(a) $(A \cap B) \subset A$

(b) $A \subset (A \cup B)$

(c) $A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$

(d) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(Vamos demonstrar apenas alguns destes itens, sendo que os demais devem ser feitos como exercício.)

Demonstração:

(a) Pela definição de inclusão devemos provar que qualquer elemento do conjunto $A \cap B$ é também um elemento do conjunto A. Considere então $x \in A \cap B$. Segue de (1.2) que $x \in A$ e $x \in B$, logo

$$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow A \cap B \subset A.$$

(b) Para verificar este item devemos mostrar que todo elemento de A é um elemento de $A \cup B$. Para tanto, dado $x \in A$ segue de (1.1) que $x \in A \cup B$.

(c) Exercício.

(d) Este é um resultado do tipo **se e somente se**, ou seja, devemos provar duas afirmações:

(i) $(A \cup B) = (A \cap B) \implies A = B$;

(ii) $A = B \implies (A \cup B) = (A \cap B)$;

Para provar (i) devemos assumir que vale a igualdade $(A \cup B) = (A \cap B)$ e provar que $A = B$, ou seja, demonstar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Considere então $x \in A$. Segue do item (b) que $x \in A \cup B$, mas pela hipótese $(A \cup B) = (A \cap B)$ temos

$$x \in A \subset A \cup B = A \cap B,$$

então $x \in A \cap B$ e pela definição de interseção obtemos $x \in B$, portanto $A \subset B$.

Para provar que $B \subset A$ podemos seguir as mesmas ideias, pois para $x \in B$ temos

$$x \in B \subset A \cup B = A \cap B,$$

concluindo então a prova da afirmação (i).

A demonstração da afirmação (ii) segue dos seguintes fatos:

$$A = B \implies A \cup B = A \cup A = A$$

e

$$A = B \implies A \cap B = A \cap A = A$$

Assim, $A \cup B = A = A \cap B$, logo fica conluida a prova do item (d).

(e) Exercício.

(f) Exercício.

(g) Para provar a igualdade destes conjuntos devemos verificar as duas inclusões

(i) $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$

(ii) $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$

Para verificar (i) note que se $x \in (A \cup B)^C$, então $x \notin A \cup B$, logo x não pode ser elemento de A e não pode ser elemento de B. Temos então $x \notin A$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in A^C$ e $x \in B^C$. Mostramos então que

$$x \in (A \cup B)^C \implies x \in A^C \cap B^C$$

Agora, se $x \in A^C \cap B^C$ então $x \notin A$ e $x \notin B$, logo $x \notin A \cup B$ e portanto $x \in (A \cup B)^C$, o que conclui a prova de (ii).

(h) Exercício.

■

1.1.3 Produto cartesiano

Seja $\{x, y\}$ um conjunto, cujos elementos podem ou não ser distintos. Para estes elementos definimos dois novos elementos, chamados de pares ordenados, indicados por (x, y) e (y, x).

Dado um outro par ordenado (x', y') definimos

$$(x, y) = (x', y') \text{ se, e somente se, } x = x' \text{ e } y = y'$$

Em particular, $(x, y) = (y, x)$ se, e somente se, $x = y$.

Definição 1.1.5 *Dados dois conjuntos não vazios A e B definimos o produto cartesiano (notação $A \times B$) de A por B como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:*

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \quad e \quad y \in B\}$$

Exemplo 1.1.6

Com respeito aos conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{0\}$ temos:

(a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

(b) $A \times C = \{(a, 0), (b, 0)\}$

Observação 1.1.4 *É interessante notar que o produto cartesiano não é comutativo, ou seja, nem sempre vale a igualdade $A \times B = B \times A$. De fato, basta considerar o produto de conjuntos distintos.*

1.1.4 Exercícios

Exercício 1.1.1 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3\},\ \ B = \{0, 3, 7, 5\} \quad e \quad C = \{0, -1, 2\},$$

determine o conjunto $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

Exercício 1.1.2 *Considere o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$. Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.*

(a) $1 \in A$

(b) $2 \in A$

(c) $7 \notin A$

(d) $11 \in A$

(e) $\{1\} \in A$

(f) $\{1, 3, 4\} \subset A$

(g) $\{1, 3\} \cap \{3, 5, 7\} \subset A$

(h) $4 \subset A$

Exercício 1.1.3 *Considere os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3\} \quad e \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

(a) Verifique se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações:

(a_1) $2 \in A$;

(a_2) $11 \in A$;

(a_3) $1 \in \mathcal{P}(A)$;

(a_4) $\{1, 3\} \subset A$;

(a_5) $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(A)$;

(a_6) $\{1, 3\} \in A$;

(b) Como foi construído o conjunto $\mathcal{P}(A)$?

Exercício 1.1.4 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $B = \{2, 3, 4\}$,
- $C = \{2, 4, 5\}$.

Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.

(a) $A \subset B$

(b) $A \subset C$

(c) $B \subset A$

(d) $B \subset C$

(e) $C \subset A$

(f) $C \subset B$

(g) $C \subset C$

(h) $\emptyset \subset B$

Exercício 1.1.5 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \quad C = \{3, 4, 5, 6\},$$

determine:

- $A \cap B$ *e* $A \cup B$
- $A \cap C$ *e* $A \cup C$
- $B \cap C$ *e* $B \cup C$
- $(A \cap B) \cap C$ *e* $A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C$ *e* $A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cup C)$

Exercício 1.1.6 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
- $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
- $D = \{3, 4, 5\}$,
- $E = \{3, 5\}$,

verifique quais destes conjuntos podem substituir o conjunto X *nas seguintes afirmações:*

(a) $X \subset D$ e $X \not\subset B$ (b) $X \subset C$ e $X \not\subset A$ (c) $X \subset A$ e $X \not\subset C$

Exercício 1.1.7 *Dado o conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$*, achar os conjuntos* $X \neq A$ *tais que* $\{1\} \subset X$ *e* $X \subset A$.

Exercício 1.1.8 *Determine os elementos do conjunto* X*,* Y *e* Z*, tais que:*

$$X \cap Y = \{2, 4\}, \quad X \cup Y = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$X \cap Z = \{2, 3\}, \quad X \cup Z = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exercício 1.1.9 *Considere o conjunto universo* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *e os subconjuntos*

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}, \quad Y = \{1, 2, 3\} \quad e \quad Z = \{4, 6, 8\}.$$

Determine:

- X^C, Y^C *e* Z^C
- $X^C \cap X$ *e* $X^C \cup X$
- $X \cap Y$, $X \cap Z$ *e* $Y \cap Z$
- $(X \cup Y)^C$ *e* $X^C \cup Y^C$
- $(X \cap Y)^C$ *e* $X^C \cap Y^C$
- $(X \cap Z)^C$ *e* $X^C \cap Z^C$

Exercício 1.1.10 *Construa exemplos de conjuntos* A*,* B *e* C *que não satisfazem as seguintes afirmações:*

(a) Se $A \cap B = \emptyset$ *e* $B \cap C = \emptyset$*, então* $A \cap C = \emptyset$*;*

(b) Se $A \subset B$ *e* $B \subset C$*, então* $A \cap B \neq \emptyset$*;*

(c) Se $A \cap B \subset C$*, então* $A \subset C$*;*

Exercício 1.1.11 *Determine os elementos dos seguintes produtos cartesianos:*

- $\{1\} \times \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \times \{a, b, c\}$
- $\{0, 1\} \times \{3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$
- $\{0, 2\} \times \{0, 2\}$
- $\{\{1, 2\}, \{3\}\} \times \{\{5\}, \{6\}\}$

Exercício 1.1.12 *Considere os conjuntos* $A = \{a, b, c\}$*,* $B = \{2, 3\}$ *e* $C = \{3, 4\}$*. Determine:*

- $A \times (B \cup C)$
- $A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C)$

Exercício 1.1.13 *Determine os números reais que tornam iguais os seguintes pares ordenados:*

(a) $(x + y, 1)$ *e* $(3, x - y)$

(b) $(y - 2, 2x + 1)$ *e* $(x - 1, y + 2)$

Exercício 1.1.14 *Sejam* a *e* b *dois números pertencentes conjunto dos naturais* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$*. Determine a interseção dos conjuntos*

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, \ldots\} \quad e \quad M(b) = \{b, 2b, 3b, \ldots\}.$$

1.2 Aula 2 - Os números racionais

---

1. Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ suas operações.

1.2.1 Os números naturais

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é, geralmente, introduzicomo sendo o conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}. \tag{1.3}$$

Entretanto, note que (1.3) é apenas um representação informal deste conjunto, pois pois o símbolo "$\ldots$" não apresenta de modo preciso a construção de $\mathbb{N}$.

A construção formal (a qual é uma bela construção) dos números naturais é feita através dos chamados *Axiomas de Peano*, os quais podem ser formulados da seguinte forma:

Definição 1.2.1 *O conjunto dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:*

(i) todo número natural tem um sucessor, que é ainda um número natural; números diferentes possuem sucessores diferentes;

(ii) existe um único número natural, denotado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;

(iii) se um conjunto A de números naturais contém o 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então $A = \mathbb{N}$;

Um entendimento mais profundo desta construção exige técnicas que fogem do escopo deste curso. Entretanto, vale ressaltar que esta formulação de $\mathbb{N}$ permite exibir de forma precisa o significado das operações de soma e produto entre números naturais, como descrevemos na sequência.

Primeiramente, para cada número natural m denote por $s(m)$ o seu sucessor. Assim, a soma de dois números naturais pode ser definida da seguinte forma:

- para cada par de números naturais m, n associamos o número (natural) $m + n$ caracterizado por:

$$\begin{aligned} m + 1 &= s(m); \\ m + s(n) &= s(m + n), \quad \text{isto é,} \quad m + (n + 1) = (m + n) + 1 \end{aligned}$$

Por exemplo, se utilizarmos a notação $s(1) = 2$, então

$$1 + 1 = s(1) = 2.$$

Agora, se denotarmos $s(2) = 3$, então

$$1 + s(1) = s(1 + 1) = s(s(1)) = s(2) = 3,$$

ou seja,

$$1 + 2 = 3,$$

assim, obtemos a noção usual de soma de números naturais.

Para definir o produto procedemos da seguinte forma:

- para cada par de númermos naturais m, n associamos o número (natural) $m \cdot n$ caracterizado por:

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &= m; \\ m \cdot s(n) &= m \cdot n + m, \quad \text{isto é,} \quad m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m, \end{aligned}$$

Note então que

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1, \\ 1 \cdot s(1) &= 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2, \\ 1 \cdot s(2) &= 1 \cdot 2 + 1 = 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

de modo que reobtemos a noção usual de produto.

Observamos ainda que, seguindo estas ideias, podemos dar um sentido formal para a *desigualdade* entre números naturais:

- dados os números naturais m, n escreve-se $m < n$ quando existe $p \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n = m + p$. Neste caso, diz-se que m é menor do que n.

Em particular, prova-se que se $m < n$ e $n < k$, então $m < k$. Mais ainda, dados $m, n \in \mathbb{N}$ apenas uma (e somente uma) das seguintes possibildiades ocorre

$$m < n, \ m = n, \ \text{ ou}, \ n < m.$$

Como dito acima, a formalização destas ideias foge ao nosso objetivo, assim assumiremos que ela é válida, bem como o seguinte resultado:

Proposição 1.2.1 *As seguintes afirmações são satisfeitas em relação às operções definidas acima:*

(associativa) $(m + n) + p = m + (n + p)$ *e* $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$*;*

(distributiva) $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$*;*

(comutativa) $m + n = n + m$ *e* $m \cdot n = n \cdot m$*;*

(corte) $m + n = m + p \Rightarrow n = p$ *e* $m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p$*;*

(compatibilidade) $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$ *e* $m < n \Rightarrow m + p < n + p$ *;*

1.2.2 Números pares e números ímpares

Com o intuito de explorar algumas propriedades apresentadas pela proposição 1.2.1, bem como aperfeiçoar as técnicas de demonstração, faremos alguns comentários sobre dois subconjuntos de $\mathbb{N}$, saber: *números pares e números ímpares.*

Definição 1.2.2 *Definimos o seguintes conjuntos em* $\mathbb{N}$*:*

(pares) $\mathcal{P} = \{m \in \mathbb{N};\ \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ satisfazendo } \ m = 2 \cdot n\}$*;*

(ímpares) $\mathcal{I} = \{1\} \cup \{m \in \mathbb{N};\ \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ satisfazendo } \ m = 2 \cdot n + 1\}$

Observação 1.2.1

Note que $\mathcal{I} = \mathbb{N} - \mathcal{P}$ e $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$. Além disso, $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{I}$.

Proposição 1.2.2 *O conjunto dos números pares é fechado em relação à soma e ao produto, isto é,*

$$m, n \in \mathcal{P} \Longrightarrow m + n \in \mathcal{P}$$

e

$$m, n \in \mathcal{P} \Longrightarrow m \cdot n \in \mathcal{P}$$

Demonstração:

Considere $m, n \in \mathcal{P}$. Por definição, existem $p, q \in \mathcal{P}$ tais que

$$m = 2 \cdot p \ \text{ e } \ n = 2 \cdot q,$$

logo

$$m + n = (2 \cdot p) + (2 \cdot q) = 2 \cdot p + 2 \cdot q = 2 \cdot (p + q) = 2 \cdot s,$$

sendo $s = p + q$, portanto $m + n = 2 \cdot s$ e assim $m + n \in \mathcal{P}$.

Por outro lado, temos

$$m \cdot n = (2 \cdot p) \cdot (2 \cdot q) = 2 \cdot p \cdot 2 \cdot q = 2 \cdot (2 \cdot p \cdot q) = 2 \cdot t,$$

sendo $t = 2 \cdot p \cdot q$, donde $m \cdot n \in \mathcal{P}$.

■

Observação 1.2.2

Uma forma equivalente de dizer que o número m é dizer que ele é divisível por 2. Podemos denotar isso por

$$p = \frac{m}{2}, \quad \text{para algum} \quad p \in \mathbb{N}.$$

De modo geral temos: dizemos que um número natural m é divsível por $n \in \mathbb{N}$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n \cdot p$. Neste caso, escrevemos

$$p = \frac{m}{n}.$$

Observe que nem sempre existe a divisão de números naturais como, por exemplo, $1/2$.

1.2.3 Equações

Ainda com o objetivo de explorar a proposição 1.2.1, faremos agora uma breve abordagem sobre a resolução de equações envolvendo números naturais.

Exemplo 1.2.1 *Vamos resolver o seguinte problema: obter um número $x \in \mathbb{N}$ que seja solução da equação $3x + 7 = 10$. (Note que não faz sentido, até o presente momento, a ideia de "passar" subtraindo).*

Observe inicialmente que $10 = 3 + 7$, logo

$$3x + 7 = 10 \iff 3x + 7 = 3 + 7,$$

logo pela propriedade do corte (para a soma), temos

$$3x + 7 = 10 \iff 3x = 3 = 3 \cdot 1$$

e pela propriedade do corte (para o produto), temos

$$3x + 7 = 10 \iff x = 1.$$

Exemplo 1.2.2 *Obter um número $x \in \mathbb{N}$ que seja solução da equação $5x + 2 = 10$.*

Analogamente ao caso anterior, escrevendo $10 = 8 + 2$, obtemos

$$5x + 2 = 10 \iff 5x + 2 = 8 + 2 \iff 5x = 8.$$

Neste caso não pode existir um elemento $x \in \mathbb{N}$ tal que $5x = 8$. De fato, note que

$$5 \cdot 1 = 5 < 8 \ \text{ e } 5 \cdot 2 = 10 > 8,$$

logo, pelo último item da proposição 1.2.1, o número x deveria satisfazer $1 < x < 2$, o que é impossível para qualquer $x \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.2.3 *Obter um par números naturais x e y que seja solução da equação $x \cdot y = 17$.*

É fácil ver que o par $(1, 17)$ e $(17, 1)$ é uma solução deste problema. Mais ainda, esta é a única solução possível.

Este exemplo se encaixa na seguinte definição:

Definição 1.2.3 (Números primos) *Dizemos que um número natural p, diferente de 1, é um número primo quando as únicas soluções da equação $x \cdot y = p$ são $x = 1$ e $y = p$.*

1.2.4 Os números inteiros

Dados dois números naturais m e n, com $m > n$, definimos o número $m - n$ como sendo o (único) número natural p que satisfaz a equação $m = p + n$, ou seja,

$$m - n = p \iff m = p + n.$$

Observação 1.2.3 *Note que:*

- *a diferença $m - n$ é, de fato, única pois se for $m - n = p$ e $m - n = p'$, então $p = p'$;*
- *quando $m < n$ (ou mesmo $m = n$) a diferença $m - n$ não faz sentido em $\mathbb{N}$, pois isto violaria o último item da proposição 1.2.1;*
- *para qualquer $m \in \mathbb{N}$ não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m + n = m$;*

Com base nestas observações introduzimos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

(i) defini-se o conjunto $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, chamado de conjunto dos inteiros positivos;

(ii) defini-se o conjunto $\mathbb{Z}^- = \{-n,\ n \in \mathbb{N}\}$, chamado de conjunto dos inteiros negativos, em que inicialmente a notação $-n$ representa apenas um símbolo qualquer (depenendete do natual n);

(iii) defini-se um elemento chamado zero, o qual é denotado por 0;

Assim, definimos o conjunto

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

Fixadas estas notações, introudizmos agora as operações de soma e produto em $\mathbb{Z}$:

(Soma) Caracterizemos a soma de números inteiros por:

- $m + n = 0$ se, e somente se, $m = -n$;
- $m + 0 = m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$;
- $m + n$ coincide com a soma de números naturais se $m, n \in \mathbb{Z}^+$;
- se $m \in \mathbb{Z}^+$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, com $m > n$, então $m + (-n)$ é a diferença entre números naturais $m - n$;
- se $m \in \mathbb{Z}^+$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, com $m < n$, então $m + (-n)$ é o número inteiro $-(n - m)$;
- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, com $m > n$, então $-m + n$ é o número inteiro $-(m - n)$;
- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, com $m < n$, então $-m + n$ é a diferença entre números naturais $n - m$;
- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, então $-m + (-n)$ é o número inteiro $-(m + n)$;

(Produto) Caracterizemos o produto de números inteiros por:

- $m \cdot n = 0$ se, e somente se, $m = 0$ ou $n = 0$;
- $m \cdot n$ coincide com o produto de números naturais $m \cdot n$;
- se $m \in \mathbb{Z}^+$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, então $m \cdot (-n)$ é o número inteiro $-(m \cdot n)$;

- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, então $(-m) \cdot n$ é o número inteiro $-(m \cdot n)$;
- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, $(-m) \cdot (-n)$ é o produto de números naturais $m \cdot n$;

Observação 1.2.4

(a) Mostra-se (sem grandes dificuldades) que estas duas operações em $\mathbb{Z}$ satisfazem as propriedades comutativa, associativa e distributiva enunciadas na proposição 1.2.1;

(b) Se m e n são inteiros diferentes de zero, então $m \cdot n \neq 0$;

(c) Podemos também definir a noção de desigualdade:

- dizemos que um número inteiro m é positivo se $m \in \mathbb{Z}^+$, e escrevemos $m > 0$;
- dizemos que um número inteiro m é negativo se $m \in \mathbb{Z}^-$, e escrevemos $m < 0$;
- dados $m, n \in \mathbb{Z}$, dizemos que $m > n$ se a diferença $m - n$ é um inteiro positivo;

Proposição 1.2.3 *As seguinte afirmações são válidas em $\mathbb{Z}$:*

(a) Se $m < n$, então $m + p < n + p$;

(b) Se $m > 0$, então $-m < 0$;

(c) Se $m < 0$, então $-m > 0$;

(d) Se $m < n$ e $p > 0$, então $m \cdot p < n \cdot p$;

(e) Se $m < n$ e $p < 0$, então $m \cdot p > n \cdot p$;

Observação 1.2.5

(a) Temos, evidentemente, $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$. Além disso, as operações de soma e produto definidas em Z coincidem com as de $\mathbb{N}$.

(b) A equação $10x + 14 = 4$ pode ser resolvida em $\mathbb{Z}$. De fato, somando o número (-14) em ambos os membros desta equação obtemos

$$\begin{aligned} 10x + 14 = 4 &\iff (10x + 14) + (-14) = 4 + (-14) \\ &\iff 10x + (14 + (-14)) = -(14 - 4) \\ &\iff 10x = -10 \\ &\iff x = -1. \end{aligned}$$

1.2.5 Números pares e ímpares

De modo natural podemos considerar os conceitos de números inteiros pares e ímpares:

(pares) $\mathcal{P} = \{m \in \mathbb{Z};\ \exists n \in \mathbb{Z} \text{ satisfazendo } m = 2 \cdot n\}$;

(ímpares) $\mathcal{I} = \{m \in \mathbb{Z};\ \exists n \in \mathbb{Z} \text{ satisfazendo } m = 2 \cdot n + 1\}$

Proposição 1.2.4 *Dado $m \in \mathbb{Z}$, temos $m^2 \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $m \in \mathcal{P}$.*

Demonstração: Para mostrar que $m^2 \in \mathcal{P}$ implica em $m \in \mathcal{P}$ é suficiente provar que nenhum número ímpar possui quadrado par.

Para tanto, note que se $m \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então $m = 2n + 1$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, assim

$$m^2 = m \cdot m = (2n+1) \cdot (2n+1) = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2k + 1,$$

sendo $k = 2n^2 + 2n$. Portanto, m^2 é ímpar quando m for ímpar.

Para mostrar a recíproca, ou seja, que m par implica em m^2 par basta notar que

$$m^2 = m \cdot m = (2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n) = 2(2n^2) = 2 \cdot k.$$

■

1.2.6 Os números racionais

Como vimos anteriormente os números naturais e os inteiros são fechados com relação as operações de soma, subtração e produto. Porém, não são fechados com respesito à divisão. Os números racionais, definidos abaixo, corrigem essa deficiência.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é definido da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ r;\ r = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

As operações de soma e produto em $\mathbb{Q}$ são as seguintes: dados dois números racionais r e s com representações

$$r = \frac{a}{b} \ \text{ e } \ s = \frac{c}{d},$$

sendo a, b, c, d inteiros e b, d diferentes de zero definimos:

$$r + s = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \ \text{ e } \ r \cdot s = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemplo 1.2.4

$$\frac{3}{4} + \frac{-2}{5} = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{7}{20} \ \text{ e } \ \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{3 \cdot (-2)}{4 \cdot 5} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$$

Observação 1.2.6

(a) Dado um racional r existe uma infinidade de formas de se escrever $r = a/b$, porém as operações acima independem da escolha das frações que possam representar cada racional. (Verifique.)

(b) As propriedades comutativa, associativa e distributiva enunciadas são válidas em $\mathbb{Q}$;

(c) Podemos também definir a noção de desigualdade:

- dizemos que um número racional $r = p/q$ é positivo se $p \cdot q > 0$;
- dizemos que um número racional $r = p/q$ é neqativo se $p \cdot q < 0$;
- dados $r, s \in \mathbb{Q}$, dizemos que $r > s$ se $r - s > 0$;

1.2.7 Exercícios

1. Verifique quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

   (a) O conjunto $\{-1, 0, 1\}$ é fechado em relação à adição;
   (b) O conjunto $\{-1, 0, 1\}$ é fechado em relação à multiplicação;
   (c) O conjunto $\{-1, 0, 1\}$ é fechado em relação à subtração;
   (d) O conjunto $\{3n + 1,\ n \in \mathbb{Z}, 0, 1\}$ é fechado em relação à multiplicação;
   (d) O conjunto $\{6n + 3,\ n \in \mathbb{Z}, 0, 1\}$ é fechado em relação à adição;

2. Dado um número inteiro a definimos o conjunto de seus múltiplos como sendo o conjunto

$$M_a = \{a \cdot m,\ m \in \mathbb{Z}\}.$$

   O conjunto M_a é fechado em relação à adição? Em relação à multiplicação?

3. Repita a proposição 1.2.2 para o caso de números inteiros.

4. Verifique onde as afirmações da proposição 1.2.1 foram utilizadas na demonstração da proposição 1.2.2.

5. Mostre que as operações de soma e produto são comutativas, associativas e distributivas;

6. A proposição 1.2.2 pode ser aplicada para o conjunto dos naturais ímpares?

1.3 Aula 3 - Os números irracionais

---

1. Respresentação decimal de racionais.

2. Dízimas periódicas e não-periódicas.

3. Existência de números irracionais: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.3.1 Exercícios

1. Expresse cada número decimal como uma fração na forma mais reduzida possível:

   (a) $2,4$
   (b) $-3,6$
   (c) $0,5555\ldots$
   (d) $0,\overline{18}$
   (e) $0,09595\ldots$
   (f) $3,\overline{27}$
   (g) $1,38181\ldots$
   (h) $-4,1\overline{7}$
   (i) $2,472472\ldots$
   (j) $1,6\overline{42}$
   (k) $0,\overline{857142}$
   (l) $1,35135135...$

2. Será que é possível escrever um decimal com um número infinito de algarismos e que não seja uma dízima periódica, seguindo alguma regra para a colocação dos algarismos?

3. Transforme os decimais em frações irredutíveis. Em seguida, reponda a pergunta.

   (a) $2,5$ e $2,4999$
   (b) $1,02$ e $1,01\overline{9}$
   (c) $3,74$ e $3,73999\ldots$
   (d) $5,\overline{9}$ e 6
   (e) O que você observou nas frações dos itens anteriores?

4. Expresse cada número como decimal:

(a) $\dfrac{7}{10}$ (b) $\dfrac{2}{5}$ (c) $\dfrac{9}{15}$ (d) $-\dfrac{7}{8}$ (e) $-\dfrac{17}{20}$ (f) $\dfrac{4}{11}$ (g) $-\dfrac{8}{7}$ (h) $-\dfrac{56}{14}$

5. As fórmulas a seguir serão muito úteis. Verifique-as:

   (a) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ **(b)** $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$ **(c)** $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$

6. Determine o valor de x, sabendo que $\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}$. (Não é necessário resolver nenhum tipo de equação.)

7. Considere $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$ (n natural e $a_n \neq 0$) um polinômio com coeficientes inteiros. Seja $r = \dfrac{p}{q}$ um número racional com p e q primos entre si. Se r é raiz de $f(x)$, é sabido que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Usando este fato, prove que são irracionais:

   (a) $\sqrt{3}$ **(b)** $\sqrt[4]{5}$ **(c)** $\sqrt{p}$

8. Cortou-se, primeiramente, $\dfrac{2}{7}$ de um fio. Depois cortou-se $0,6$ do restante. A parte que restou foi dividida em 50 partes iguais, cada uma medindo 16 metros. Calcule o comprimento do fio.

9. Euclides mostrou que há um número infinito de primos usando um argumento muito simples. Ele supôs que houvesse somente um número finito de primos, digamos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ e então considerou o número $p_1 \cdots p_n + 1$ consistindo do produto de todos esses primos mais 1. Dessa forma, esse número não poderá ser primo, já que é maior que todos os primos listados. Portanto, algum primo p_k da lista acima deve dividi-lo. Obtenha com isso uma contradição.

10. Dados dois números a e b reais e positivos, chama-se *média aritmética* de a e b ao número $\dfrac{a+b}{2}$ e chama-se *média geométrica* ao número $\sqrt{ab}$. Se $0 < a < b$, mostre que

    (a) $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ **(b)** $a < \sqrt{ab} < b$ **(c)** $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

11. Mostre que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$.

12. Mostre que existem a e b racionais, tais que $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

13. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras? Explique sua resposta.

    (a) $3 \in \mathbb{R}$
    (b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
    (c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
    (d) $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
    (e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
    (f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
    (g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
    (h) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
    (i) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

14. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Caso não seja verdadeira, apresentar um **contra-exemplo**, ou seja, um exemplo para o qual a afirmação feita é falsa.

    (a) A soma de dois números racionais é sempre racional.
    (b) A soma de um número irracional com um racional é sempre irracional.
    (c) O produto de dois números racionais é sempre racional.
    (d) O produto de dois números irracionais é sempre irracional.
    (e) Um número irracional elevado ao quadrado é sempre irracional.
    (f) A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

(g) A raiz quadrada de um número irracional positivo é sempre irracional.

(h) Quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $ab = ac$ então $b = c$.

(i) Quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, se $ab < ac$ então $b < c$.

(j) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, se $a < b$ então $a^2 < b^2$.

(k) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, se $a^2 = b^2$ então $a = b$.

(l) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, se $a < b$ então $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

15. Efetue as operações indicadas e escreva, em cada caso, se o resultado é um número racional ou irracional.

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ **(c)** $\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}$ **(e)** $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$ **(g)** $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$

(b) $7 - \sqrt[3]{5} - (8 - \sqrt[3]{5})$ **(d)** $5 + \sqrt{11} - (3 - \sqrt{11})$ **(f)** $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

16. Prove que:

(a) Um número racional $\dfrac{m}{n}$, com $mdc(m, n) = 1$ (a fração é irredutível), pode ser representado como um decimal finito se, e somente se, $n = 2^j 5^k$, onde $j, k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(b) Todo número racional $\dfrac{m}{n}$, com $mdc(m, n) = 1$ (a fração é irredutível), e onde $n = Np$, $N \in \mathbb{Z}$, p é um primo, $p \neq 2$ e $p \neq 5$, pode ser representado como uma dízima periódica.

Capítulo 2

Inequações de grau 1

Resumo:

2.1 Aula 4 - Inequações

1. Equações de primeira ordem.
2. Intervalos
3. A relação de ordem $\leqslant$ em $\mathbb{R}$ e algumas propriedades.
4. Primeiras inequações.

2.1.1 Exercícios

1. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

   (a) $x - 1 < 4$

   (b) $x(3 - x) < 2$

   (c) $-10x + 5 \leqslant x$

   (d) $\dfrac{2}{x} - 3 < \dfrac{4}{x} + 1$

   (e) $2x - 3 - (x + 2) < \dfrac{1}{3}$

   (f) $x - 3 + x - 1 > x - 4$

   (g) $x - 2 + x + 3 < x + 1$

   (h) $\dfrac{3}{x} < 5$

   (i) $x(x - 3)(6 - x) < 0$

   (j) $(x + 1)(2x - 3)(x + 5) \geq 0$

   (k) $1 - 3x \leqslant 2 - 3x$

   (l) $(1 - 3x)(2 - 3x) > 2$

   (m) $(4x - 1)(3x + 2)(5x + 1) \leq 0$

2.2 Aula 5 - Inequações envolvendo quocientes

2.2.1 Exercícios

1. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

   (a) $\dfrac{3 - x}{x - 1} < 4$

   (b) $\dfrac{x}{3 - x} > 2$

   (c) $\dfrac{-10x + 5}{x} \leqslant 1$

   (d) $\dfrac{2}{x - 3} < -5$

   (e) $\dfrac{2x - 3}{x + 2} \geqslant \dfrac{1}{3}$

   (f) $\dfrac{x - 3}{x - 1} > 1$

   (g) $\dfrac{x - 2}{x + 3} \geqslant 1$

   (h) $\dfrac{3}{x} > 5$

   (i) $\dfrac{x - 3}{6 - x} < 0$

   (j) $\dfrac{2x - 3}{x + 5} \geq 0$

   (k) $\dfrac{1 - 3x}{3} \leqslant 2 - 3x$

   (l) $\dfrac{1 - 3x}{2 - 3x} > 2$

   (m) $\dfrac{4x - 1}{3x + 2} \geqslant 0$

2.3 Aula 6 - Inequações Modulares

1. O módulo (valor absoluto) de um número real;
2. Equações modulares
3. Inequações modulares

2.3.1 Exercícios

1. Resolva as equações abaixo.

   (a) $|5x-3|=3$;
   (b) $|5x+1|=1$;
   (c) $|5x+1|=-1$;
   (d) $5|x|+6=0$;
   (e) $|2x+5|>2$;
   (f) $x-|5x+6|=0$;
   (g) $x-|2x+1|=2$;
   (h) $|3x+4|=3$;
   (i) $|3x+4|=-x$;
   (j) $|2x-4|=|4x+3|$;
   (k) $|x|-|3x+4|=2x$;
   (l) $3|x|+1=0$;
   (m) $x|x+1|=0$;
   (n) $|4x-1|=3$;
   (o) $|3x+7|=|3x+8|$;

2. Elimine o módulo nas expressões abaixo.

   (a) $f(x)=|3x+1|-|4x-2|$;
   (b) $g(x)=|-2x-2|+3|x-2|$;
   (c) $h(x)=|3x-1|+|3x-2|$;
   (d) $i(x)=|x-1|+|x|+|x+1|$;

3. Resolva as inequações abaixo.

   (a) $|x-7|<9$;
   (b) $|2x+3|\leq 10$;
   (c) $|3x-1|<x$;
   (d) $|x-1|+|x-3|<4x$;
   (e) $\dfrac{1}{|x+1||x-3|}\geq \dfrac{1}{5}$;
   (f) $|5x|>1$;
   (g) $|3x-4|\geq 2$
   (h) $|5x|>1$;
   (i) $|x-1|-|x-3|\geq \dfrac{|x-1|}{2}$;
   (j) $|x-3|>x+1$;
   (k) $|2x+1|<0$;
   (l) $3|x|+1>0$;
   (m) $x|x+1|>0$;
   (n) $|4x-1|\leq 3$;
   (o) $|3x+7|>|3x+8|$;
   (p) $\dfrac{(2x+1)(x-2)}{|3x+4|}\geq 0$;
   (q) $\dfrac{|3x+2|}{4x}\geq 0$;
   (r) $\dfrac{|3x+2|}{4x}\geq 1$;

4. Prove que:

   (a) $|x|\geq 0$;
   (b) $|x|=0$ se, e somente se, $x=0$;
   (c) $|x-y|\leq |x|+|y|$;
   (d) $||x|-|y||\leq |x+y|$;
   (e) Dado $c>0$, tem-se $|x|>c$ se, e somente se, $x<-c$ ou $x>c$.;

5. Mostre que se $|x-6|<1$ então $|x|<7$.
6. Suponha que $|x-8|<2$. Quão grande $|x-5|$ pode ser?

Referências Bibliográficas

[1] Edgar de Alencar Filho, *Teoria Elementar dos Conjuntos*, Livraria Nobel, 1976.

[2] Elon lages Lima, *Números e Funções Reais*, SBM, 2014.

[3] Geson Iezzi, Carlos Murakami, *Fundamentos de Matemática - Vol 1, 2, 3, 6*, Atual, 2013.

[4] Ivan Niven., *Números: Racionais e Irracionais*, SBM, 2012.

[5] Roberto Romano, *Cálculo Diferencial e Integral*, Atlas, 1983.