Processo Seletivo Estendido 2017

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

---

1 Números complexos

Exercício 1.1 *Sejam $a = 3 - 2i$, $b = -1 + 3i$, $c = 2 + 2i$ e $d = i$. Calcule:*

(a) $a + 2b$;
(b) $c + d$;
(c) $a \cdot b$;
(d) $c \cdot d$;
(e) a^{-1};
(f) c/b;
(g) b/c;
(h) d^{-1};
(i) a/d;
(j) $a \cdot c$;
(k) d^{-1};
(l) $|b - c|$;
(m) d^{2017};
(n) $a + b + c + d$;

Exercício 1.2 *Resolva as equações abaixo, considerando as possíveis soluções comlexas.*

(a) $x^2 = -1$;
(b) $x^2 + 5 = 0$;
(c) $x^2 - 2x + 8 = 0$;
(d) $3x^2 + 2x + 1 = 0$;
(e) $x^2 - 4x + 8 = -0$;
(f) $x^2 - 8x + 5 = 0$;
(g) $x^2 + 2ix - 2 = 0$;
(h) $x^2 + ix + 2 = 0$;

Exercício 1.3 *Obtenha a forma polar dos números abaixo.*

(a) $z = 1 + i\sqrt{3}$;
(b) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$;
(c) $z = 1 - -i$;
(d) $z = -3 - i3\sqrt{3}$;
(e) $z = -2i$;
(f) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;
(g) $z = -5\sqrt{3} + -5i$;
(h) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Exercício 1.4 *Resolva as equações abaixo:*

(a) $2z + \frac{\overline{z}}{2} = 3i + 2$;
(b) $2z + -3z = 2i$;
(c) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$;
(d) $z\overline{z} = 1$;

Exercício 1.5 *Obtenha a forma algébrica dos números abaixo.*

(a) $(-1 + i)^{20}$;
(b) $(-1 - \sqrt{3}i)^8$;
(c) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)^4$;
(d) $\left(-3 + i\sqrt{3}\right)^6$;
(e) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$;
(f) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2$;
(g) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^7$;
(h) $\left(-\sqrt{3} - i\right)^{10}$;

Exercício 1.6 *Obtenha todas as soluções das equações abaixo e as represente no plano complexo.*

(a) $x^4 = 16$;
(b) $x^3 = 8i$;
(c) $x^4 = -81$;
(d) $x^2 = -18 + 18\sqrt{3}$;
(e) $x^8 = 256$;
(f) $x^6 = 8$;
(g) $x^6 = -1728$;
(h) $x^8 = 1$;

Exercício 1.7 *Calcule*

(a) i^{20} ;

(b) i^{72};

(c) i^{1041};

(d) i^{100};

(e) i^{207};

(f) $(1+i)^{20}$;

(g) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$;

(h) $1+i+i^2+\ldots+i^{1992}$;

Exercício 1.8 *Sendo n um número inteiro, que valores pode ter $i^n + i^{-n}$?*

Exercício 1.9 *Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{a+i}{1+ai}$ seja um número real.*

Exercício 1.10

Prove as seguintes afirmações

(a) $\overline{\overline{z}} = z$;

(b) *se* $z \neq 0$, *então* $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;

(c) *se* $z \neq 0$, *então* $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$;

(d) *se* $z \neq 0$, *então* $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;

(e) *se* $z \neq 0$, *então* $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$;

(f) *se* $|z| = 1$, *então* $\frac{1}{z} = \overline{z}$;

(f) *se* $\frac{1}{z} = \overline{z}$, *então* $|z| = 1$;

Exercício 1.11 *Suponha que $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$. Prove que se z é uma solução complexa da equação*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0, \quad com \quad a_j \in \mathbb{R},$$

então $\overline{z}$ também é uma solução desta equação.

Exercício 1.12 *Seja P um polinômio de coeficientes reais tal que $P(1-i) = 2+3i$. Determine $P(1+i)$.*

Exercício 1.13 *Mostre que se $z = |z|(cos(\theta) + i(\theta))$ então $\overline{z} = |z|(cos(-\theta) + i(-\theta))$.*

Exercício 1.14 *Admitindo a fórmula $e^{ix} = cos(x) + isen(x)$:*

(a) *Calcule* $e^{2\pi i}$;

(b) *Calcule* $e^{\pi i/4}$;

(c) *Prove que*

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad e \quad sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

Exercício 1.15 *Mostre que se z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero, então $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$.*