

FUNÇÕES - PROVA 4 -
Processo Seletivo Estendido 2016

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

(Questão 1) Faça o que se pede.

(a) Considere o conjunto

$$A = \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right].$$

Mostre que a expressão

$$f(x) = \log_{10} \left(\cos(x) - \frac{1}{2} \right)$$

define uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$;

(b) Obtenha as soluções distintas da equação

$$w^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

(Questão 2) Sejam a e b números reais, diferentes de zero, e considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a \cos(x) - b \operatorname{sen}(x).$$

(a) Se $a = b = 1$, então quais são as raízes da equação $f(x) = 0$?

(b) Mostre que se $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 0$, então vale a seguinte relação:

$$\begin{cases} a \operatorname{sen}(x_2) \cos(x_1) - b \operatorname{sen}(x_1) \operatorname{sen}(x_2) = 0 \\ a \operatorname{sen}(x_1) \cos(x_2) - b \operatorname{sen}(x_2) \operatorname{sen}(x_1) = 0 \end{cases};$$

(c) Mostre que se $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 0$, então

$$x_1 - x_2 = m\pi, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z};$$

(Dica: use o item (b))

(Questão 3) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x) = e^{ix}$.

(a) Calcule $|f(x)|$, para cada $x \in \mathbb{R}$;

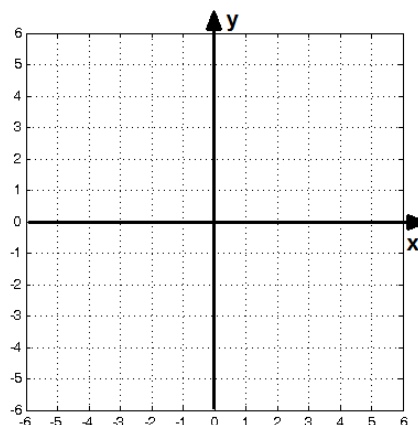
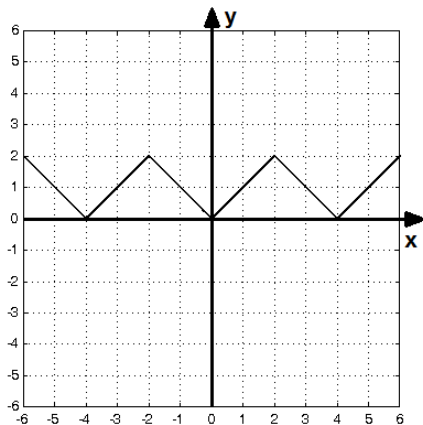
(b) A função f é sobrejetiva? Justifique;

(c) Obtenha funções reais $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam a igualdade

$$\frac{1}{f(x)} = g(x) + ih(x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

(Questão 4) Utilizando o esboço do gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, obtenha o da função pedida.

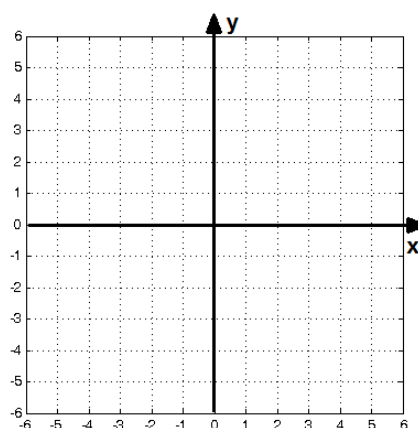
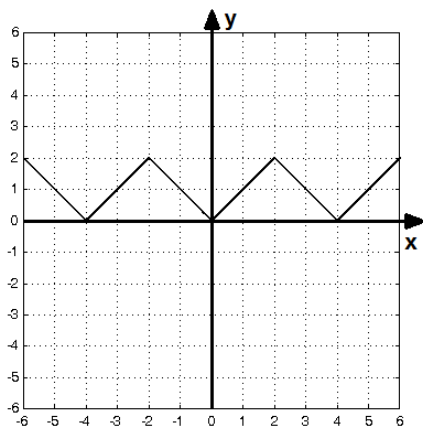
(a) Esboce o gráfico de $g(x) = -f(x)$;



$$f(x)$$

$$g(x) = -f(x)$$

(b) Esboce o gráfico de $h(x) = f(x + 1)$;



$$f(x)$$

$$h(x) = f(x + 1)$$