Quantos valores de θ fornecendo soluções distintas de $(*)$ podemos encontrar? Note que se fixamos j então

$$\cos\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2j\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2(j+n)\pi}{n}\right)$$

e

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2j\pi}{n}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2(j+n)\pi}{n}\right)$$

logo, fazendo $j=0,1,\ldots,n-1$ obtemos precisamente n soluções

$$\theta_1=\frac{\theta_0}{n},\ldots,\theta_j=\frac{\theta_0}{n}+\frac{2(j-1)\pi}{n},\ldots,\theta_n=\frac{\theta_0}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Portanto as raizes n-ésimas de z_0 são:

$$z_j={r_0}^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2(j-1)\pi}{n}\right)+\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2(j-1)\pi}{n}\right)\right]$$

onde $1\le j\le n$.

Por exemplo, as raizes cúbicas de $1=\cos 0+\boldsymbol{i}\operatorname{sen}0$ são

$$\begin{aligned} z_1&=1,\\ z_2&=\cos\frac{2\pi}{3}+\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\frac{-1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ z_3&=\cos\frac{4\pi}{3}+\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}=\frac{-1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Observe que ${z_2}^2=z_3$ pois $\arg({z_2}^2)=2\arg(z_2)=\arg(z_3)$. Escrevendo $z_2=\omega$ temos que essas raizes são ω,ω^2 e $\omega^3=1$.

Mais geralmente, as raizes n-ésimas de 1 são

$$z_j=\cos\left(\frac{2(j-1)\pi}{n}\right)+\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\left(\frac{2(j-1)\pi}{n}\right),\ 1\le j\le n.$$

Novamente, $\arg({z_2}^k)=k\arg(z_2)=\arg(z_{k+1})$ para $2\le k\le n-1$, ou seja, ${z_2}^k=z_{k+1}$ e fazendo $\omega=z_2=\cos\frac{2\pi}{n}+\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$ concluímos que as raizes de ordem n de 1 são $\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}$ e $\omega^n=1$. Note que, como pontos no plano $\mathbb{C}$, elas são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito no círculo de centro 0 e raio 1.

4 Exercícios

1) Reduza à forma $x+\boldsymbol{i}y$:

$(1-5\boldsymbol{i})^2-4\boldsymbol{i}$; $-\boldsymbol{i}(-1+\boldsymbol{i})+2$; $(3+\boldsymbol{i})(1-11\boldsymbol{i})$; $(\sqrt{2}-\boldsymbol{i}\sqrt{5})(\sqrt{5}+\boldsymbol{i}\sqrt{2})$.

2) Reduza à forma $x+\boldsymbol{i}y$:

$$\frac{3-4\boldsymbol{i}}{2\boldsymbol{i}};\quad \frac{2+5\boldsymbol{i}}{-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}};\quad \frac{(2-2\boldsymbol{i})^2}{1+\boldsymbol{i}};\quad \frac{z-\overline{z}\boldsymbol{i}}{\overline{z}-z\boldsymbol{i}}.$$

3) Faça um esboço e identifique os seguintes conjuntos:

$$|z|=|z-2|;\quad |z|=|\overline{z}-1|;\quad a|z|=|z-1|,\ a\in\mathbb{R},\ a\ne\begin{cases}0\\1\end{cases}.$$

4) Faça um esboço e identifique os seguintes conjuntos:

$$\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z-1);\quad \operatorname{Im}(z-1)=|z+1|;\quad |\overline{z}|=|z-1|.$$

5) Mostre que $||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|$.

6) Deduza a desigualdade $|z_1+z_2+z_3|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|$.

7) Mostre que, se $z_2\ne -z_3$, então

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right|\le\frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}.$$

8) Resolva as equações:

$$z-\overline{z}=1;\quad z+\overline{z}\boldsymbol{i}=2+\boldsymbol{i};\quad z+2\overline{z}=1-\boldsymbol{i}.$$

9) Mostre que $|z_1+z_2|<|1+\overline{z_1}z_2|$ desde que $|z_1|<1$ e $|z_2|<1$.

10) Encontre todas as soluções das equações:

$$z^2=1-\boldsymbol{i}\sqrt{3};\quad z^5=-1;\quad \overline{z}^3=1;\quad z^7=-(1+\boldsymbol{i}).$$

11) Seja $P(x)=ax^2+bx+c$ um polinomio de grau 2 com coeficientes reais e suponha que $\Delta=b^2-4ac<0$. Então, as soluções da equação

$P(x) = 0$ são números complexos com parte imaginária não nula. Se z_1 e z_2 são essas soluções, mostre que $z_2 = \overline{z_1}$. Mais geralmente, se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é um polinomio de grau $n > 0$ arbitrário, com coeficientes reais, e se $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $P(z_0) = 0$, então tem-se que $P(\overline{z_0}) = 0$.

12) Considere a equação $az^2 + bz + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Deduza uma expressão para as suas raizes.

13) Deduza a fórmula

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}, \quad z \neq 1.$$

14) Use o exercício anterior para mostrar que, se $\omega \neq 1$ satisfaz a equação $\omega^n = 1$, então

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$

15) Demonstre a fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + \boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + \boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,n\theta.$$

16) Use o exercício anterior e deduza

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta \\
\mathrm{sen}\,2\theta &= 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\
\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta \\
\mathrm{sen}\,3\theta &= 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta.
\end{aligned}$$

17) Use o exercício 15 para deduzir expressões para $\mathrm{sen}\,4\theta$ e para $\cos 4\theta$.

18) Calcule $(2+\boldsymbol{i})(3+\boldsymbol{i})$ e deduza a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.$$

19) Calcule $(5-\boldsymbol{i})^4(1+\boldsymbol{i})$ e deduza a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

20) Mostre que três pontos a, b e c no plano são colineares se, e somente se

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & \overline{a} \\ 1 & b & \overline{b} \\ 1 & c & \overline{c} \end{pmatrix} = 0$$

21) Uma ordem num corpo $\mathbb{K}$ consiste em dar um subconjunto $\mathbb{K}^+$ de $\mathbb{K}$ tal que:

(i) se $x, y \in \mathbb{K}^+$ então $x + y \in \mathbb{K}^+$ e $xy \in \mathbb{K}^+$ ($\mathbb{K}^+$ é chamado o conjunto de elementos *positivos*) e

(ii) dado $x \in \mathbb{K}$ então apenas uma das possibilidades se verifica: ou $x \in \mathbb{K}^+$, ou $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{K}^+$.

Segue daí que o quadrado de qualquer elemento não nulo de $\mathbb{K}$ é positivo. De fato, se $x \in \mathbb{K}^+$ então $x^2 \in \mathbb{K}^+$ por (i). Por outro lado, se $-x \in \mathbb{K}^+$ então $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 \in \mathbb{K}^+$, por (i) novamente. Conclua que o corpo $\mathbb{C}$ não pode admitir uma ordem.