

no Teorema 1.4, já que

$$\begin{aligned} e^{2k\pi i} z^\lambda &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \exp\left(\frac{\text{Log } z}{n}\right) \\ &= \exp\left[\frac{\text{Log } |z|}{n} + i\left(\frac{\text{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \exp(\text{Log } \sqrt[n]{|z|}) \exp\left[i\left(\frac{\text{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \sqrt[n]{|z|} \exp\left[i\left(\frac{\text{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Em particular,

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}. \quad (1.26)$$

Embora seja verdade que $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda z^\mu$ (veja ER 10), outras “regras de exponenciação” não são válidas em geral. Por exemplo, não é sempre verdade que $(zw)^\lambda = z^\lambda w^\lambda$ e nem que $(z^\lambda)^\mu = z^{\lambda\mu}$ (veja EP 23).

1.9 Exercícios resolvidos

ER 1. Sejam z e w dois números complexos não nulos. Mostre que:

- (a) Se $zw = 1$, então $w = z^{-1}$ e $z = w^{-1}$.
 (b) $(z^{-1})^{-1} = z$ e $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$.

ER 2. Sejam $z = 2 + 3i$ e $w = 4 - 3i$. Coloque os seguintes números complexos na forma algébrica:

$$z^2 + \bar{z}w, \quad \text{Im}(w^2) + i\text{Re}(\bar{w}^2) \quad \text{e} \quad 5z/w.$$

ER 3. Mostre que se $z = x + yi$ e $w = a + bi \neq 0$, então

$$\frac{z}{w} = \frac{ax + by}{a^2 + b^2} + \frac{ay - bx}{a^2 + b^2} i.$$

ER 4. Mostre que:

§1.9 Exercícios resolvidos

- (a) $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{10}$
 (b) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$
 (c) $(1 + i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1 - i\sqrt{3})$

ER 5. Descreva geometricamente os pontos que satisfazem a condição $|z - 1| = |z + 1|$.

ER 6. Prove que as soluções da equação $z^2 + az + b = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, são

Use esta fórmula para encontrar as raízes da equação $z^2 + az + b = 0$.

ER 7. É verdade que $\sqrt[3]{z^2} = (\sqrt[3]{z})^2$?

ER 8. Determine os valores de $\text{Arg}(z)$ e $\text{Arg}(w)$ tais que $\text{Arg}(zw) = \text{Arg } z + \text{Arg } w$.

ER 9. Dê exemplos mostrando que:

- (a) $\text{Arg}(z^{-1}) \neq -\text{Arg } z$.
 (b) $\text{Arg}(zw) \neq \text{Arg } z + \text{Arg } w$.
 (c) $\text{Log}(zw) \neq \text{Log } z + \text{Log } w$.
 (d) $\text{Log}(z/w) \neq \text{Log } z - \text{Log } w$.
 (e) $\text{Log}(z^2) \neq 2\text{Log } z$.

ER 10. Mostre que $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda z^\mu$ se e somente se $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.

$$\left[\frac{1}{2k\pi} \right] \left[\frac{1}{n} \right] \left[\frac{1}{2k\pi} \right]$$

(1.26)

ER 10), outras "regras de exemplo, não é sempre verdade

23).
 Múltiplos. Mostre que:

seguintes números complexos

$5z/w$.

então

- (a) $|(2z + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- (b) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$.
- (c) $(1 + i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1 + i\sqrt{3})$.

ER 5. Descreva geometricamente o conjunto S dos números complexos z que satisfazem a condição $|z - 1| = 2|z + 1|$.

ER 6. Prove que as soluções da equação quadrática

$$az^2 + bz + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, são dadas pela fórmula quadrática usual, isto é, por

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Use esta fórmula para encontrar as soluções de $z^2 + 4z + 5 = 0$.
 ER 7. É verdade que $\sqrt[3]{z^2} = (\sqrt[3]{z})^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$?

ER 8. Determine os valores de z tais que $\exp(2z - 1) = 1$.

ER 9. De exemplos mostrando que é possível termos:

(a) $\text{Arg}(z^{-1}) \neq -\text{Arg } z$.

(b) $\text{Arg}(zw) \neq \text{Arg } z + \text{Arg } w$.

(c) $\text{Log}(zw) \neq \text{Log } z + \text{Log } w$.

(d) $\text{Log}(z/w) \neq \text{Log } z - \text{Log } w$.

(e) $\text{Log}(z^2) \neq 2 \text{Log } z$.

ER 10. Mostre que $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda z^\mu$ para quaisquer $z, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$.

1.10 Exercícios propostos

EP 1. Conclua a demonstração da Proposição 1.1.

EP 2. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Mostre que se $zw = 0$, então $z = 0$ ou $w = 0$.

EP 3. Sejam $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ com $w_1 \neq 0$ e $w_2 \neq 0$. Mostre que

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{w_1} \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}.$$

EP 4. Se $z = 1 - i$ e $w = 4i$, expresse os seguintes números complexos na forma $x + yi$:

- (a) $3z + iwz - z\bar{w}^3$.
- (b) $2|w| + (1 - i)z + |z^2|$.
- (c) $(w + z)/(w - z)$.
- (d) $\text{Im}(\bar{z}w^2) + 16i \text{Re}(zw^{-1})$.
- (e) $5i \text{sen}(\text{Arg } w) + z \cos(\text{Arg}(3z))$.

EP 5. Mostre que a identidade $1 + z + \dots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 1$.

EP 6. Conclua a demonstração da Proposição 1.2.

EP 7. Prove e dê o significado geométrico da identidade

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2 \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

EP 8. Dados dois números complexos não nulos z e w , mostre que $|z + w| = |z| + |w|$ se e somente se $w = tz$ para algum $t > 0$.

EP 9. Conclua a demonstração da Proposição 1.3.

EP 10. Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano complexo:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$
- (c) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 1\}$
- (d) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = 1\}$
- (e) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ e } \text{Re } z = 1\}$
- (f) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ e } \text{Im } z = 1\}$
- (g) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ e } \text{Re } z = 1 \text{ e } \text{Im } z = 1\}$

EP 11. Compute

- (a) As raízes quadradas de $1 + i$.
- (b) As raízes cúbicas de $1 + i$.
- (c) As raízes de $z^3 - 1$.

EP 12. Mostre que se z e w são números complexos não nulos, então $|z + w| = |z| + |w|$ se e somente se z ou w for um múltiplo positivo do outro.

EP 13. Ache as raízes de

- (a) $z^2 - 4iz - 4$
- (b) $iz^4 - (2 + 4i)z^2 + 2$

EP 14. Prove que se z e w são números complexos não nulos, então $|z + w| = |z| + |w|$ se e somente se $w = tz$ para algum $t > 0$.

EP 15. Para que valores de t a equação $z^2 + tz + 1 = 0$ tem raízes reais?

EP 16. Sejam z e w números complexos não nulos. Prove que $|z + w| = |z| + |w|$ se e somente se $w = tz$ para algum $t > 0$.

Re

ou $z = 0$ ou $w = 0$.

0. Mostre que

$$\frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}$$

os números complexos na

$(1 - z^{n+1}) / (1 - z)$ vale para

tidade

$(z, w \in \mathbb{C})$.

e w , mostre que $|z + w| =$

ntes subconjuntos do plano

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z - i|\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = \operatorname{Re} z\}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) > 0\}$.

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(1/z) < 1/2\}$.

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4| > |z|\}$.

(f) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} i| < \pi/6\}$.

(g) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(z - i)| > \pi/6\}$.

EP 11. Compute:

(a) As raízes quadradas de $1 - i\sqrt{3}$.

(b) As raízes cúbicas de -27 .

(c) As raízes de ordem 4 de -1 .

EP 12. Mostre que a igualdade $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ não é necessariamente verdadeira para z e w quaisquer em \mathbb{C} . Confirme, porém, que esta fórmula é válida se z ou w for um número real não negativo.

EP 13. Ache as soluções das seguintes equações:

(a) $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$.

(b) $iz^4 - (2 + 4i)z^2 - i = 0$.

EP 14. Prove que $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

EP 15. Para que números complexos $z \neq 0$ temos que $\sqrt{z/z} = z/|z|$?

EP 16. Sejam z e w dois números complexos não nulos. Mostre que

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z||w| \text{ se e somente se } \arg w = \arg z.$$

EP 17. Seja $c \in \mathbb{C}$ com $|c| < 1$. Mostre que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ se e somente se $|z| \leq 1$, com igualdade ocorrendo se e somente se $|z| = 1$.

EP 18. Prove que $e^{-|z|} \leq |e^z| \leq e^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

EP 19. Conclua a demonstração da Proposição 1.6.

EP 20. Verifique que

$$\operatorname{Log}(1 - z^2) = \operatorname{Log}(1 - z) + \operatorname{Log}(1 + z) \text{ quando } |z| < 1.$$

O que podemos dizer de $\operatorname{Log}[(1 - z)/(1 + z)]$ para tais valores de z ?

EP 21. Expresse os seguintes números complexos na forma $x + yi$:

(a) $\operatorname{Log}(-e^3) + i^i$.

(b) $(-1)^i \operatorname{Log}(-i)$.

EP 22. Calcule todas as λ -potências de z quando:

(a) $z = ie^\pi$ e $\lambda = i$.

(b) $z = 1$ e $\lambda = 2 - i$.

EP 23. Dê exemplos mostrando que é possível termos:

(a) $(zw)^\lambda \neq z^\lambda w^\lambda$.

(b) $(z^\lambda)^\mu \neq z^{\lambda\mu}$.

2.1 Introdução

Tendo estudado
iniciar o estudo das
funções $f : A \rightarrow \mathbb{C}$
o principal objeto de
por todos os capítulos

Na Seção 2.2 lem
duzimos as funções
noções básicas assoc

Nas Seções 2.3,
complexas de uma v
polinomiais, a funçã
hiperbólicas. Além d

Na Seção 2.6 intr
a função raiz quadra

2.2 Funções

Começamos lemb
conjuntos A e B , um