no Teorema 1.4, já que

$$\begin{aligned} e^{2k\pi\lambda i} z^{\lambda} &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \exp\left(\frac{\operatorname{Log} z}{n}\right) \\ &= \exp\left[\frac{\operatorname{Log}|z|}{n} + i\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \exp(\operatorname{Log} \sqrt[n]{|z|}) \exp\left[i\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \sqrt[n]{|z|} \exp\left[i\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Em particular,

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}. \tag{1.26}$$

Embora seja verdade que $z^{\lambda+\mu} = z^{\lambda} z^{\mu}$ (veja ER 10), outras "regras de exponenciação" não são válidas em geral. Por exemplo, não é sempre verdade que $(zw)^{\lambda} = z^{\lambda} w^{\lambda}$ e nem que $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$ (veja EP 23).

1.9 Exercícios resolvidos

ER 1. Sejam z e w dois números complexos não nulos. Mostre que:

(a) Se $zw = 1$, então $w = z^{-1}$ e $z = w^{-1}$.

(b) $(z^{-1})^{-1} = z$ e $(zw)^{-1} = z^{-1} w^{-1}$.

ER 2. Sejam $z = 2+3i$ e $w = 4-3i$. Coloque os seguintes números complexos na forma algébrica:

$$z^2 + \overline{z}w, \quad \operatorname{Im}(w^2) + i\operatorname{Re}(\overline{w}^2) \quad \text{e} \quad 5z/w.$$

ER 3. Mostre que se $z = x + yi$ e $w = a + bi \neq 0$, então

$$\frac{z}{w} = \frac{ax+by}{a^2+b^2} + \frac{ay-bx}{a^2+b^2}\, i.$$

ER 4. Mostre que:

(a) $|(2\overline{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}\,|2z+5|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$.

(c) $(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$.

ER 5. Descreva geometricamente o conjunto S dos números complexos z que satisfazem a condição $|z-1| = 2|z+1|$.

ER 6. Prove que as soluções da equação quadrática

$$az^2 + bz + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, são dadas pela fórmula quadrática usual, isto é, por

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Use esta fórmula para encontrar as soluções de $z^2 + 4z + 5 = 0$.

ER 7. É verdade que $\sqrt[3]{z^2} = (\sqrt[3]{z})^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$?

ER 8. Determine os valores de z tais que $\exp(2z-1) = 1$.

ER 9. Dê exemplos mostrando que é possível termos:

(a) $\operatorname{Arg}(z^{-1}) \neq -\operatorname{Arg} z$.

(b) $\operatorname{Arg}(zw) \neq \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$.

(c) $\operatorname{Log}(zw) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$.

(d) $\operatorname{Log}(z/w) \neq \operatorname{Log} z - \operatorname{Log} w$.

(e) $\operatorname{Log}(z^2) \neq 2\operatorname{Log} z$.

ER 10. Mostre que $z^{\lambda+\mu} = z^{\lambda} z^{\mu}$ para quaisquer $z, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$.

1.10 Exercícios propostos

EP 1. Conclua a demonstração da Proposição 1.1.

EP 2. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Mostre que se $zw = 0$, então $z = 0$ ou $w = 0$.

EP 3. Sejam $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ com $w_1 \neq 0$ e $w_2 \neq 0$. Mostre que

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{w_1}\frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}.$$

EP 4. Se $z = 1 - i$ e $w = 4i$, expresse os seguintes números complexos na forma $x + yi$:

(a) $3z + iwz - z\overline{w}^3$.

(b) $2|w| + (1-i)z + |z^2|$.

(c) $(w+z)/(w-z)$.

(d) $\operatorname{Im}(\overline{z}w^2) + 16i \operatorname{Re}(zw^{-1})$.

(e) $5i \operatorname{sen}(\operatorname{Arg} w) + z\cos(\operatorname{Arg}(3z))$.

EP 5. Mostre que a identidade $1 + z + \cdots + z^n = (1 - z^{n+1})/(1-z)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 1$.

EP 6. Conclua a demonstração da Proposição 1.2.

EP 7. Prove e dê o significado geométrico da identidade

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2 \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

EP 8. Dados dois números complexos não nulos z e w, mostre que $|z+w| = |z| + |w|$ se e somente se $w = tz$ para algum $t > 0$.

EP 9. Conclua a demonstração da Proposição 1.3.

EP 10. Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano complexo:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-i|\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \operatorname{Re} z\}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) > 0\}$.

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(1/z) < 1/2\}$.

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z-4| > |z|\}$.

(f) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} i| < \pi/6\}$.

(g) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(z-i)| < \pi/6\}$.

EP 11. Compute:

(a) As raízes quadradas de $1 - i\sqrt{3}$.

(b) As raízes cúbicas de -27.

(c) As raízes de ordem 4 de -1.

EP 12. Mostre que a igualdade $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ não é necessariamente verdadeira para z e w quaisquer em $\mathbb{C}$. Confirme, porém, que esta fórmula é válida se z ou w for um número real não negativo.

EP 13. Ache as soluções das seguintes equações:

(a) $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$.

(b) $iz^4 - (2+4i)z^2 - i = 0$.

EP 14. Prove que $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \le \sqrt{2}\,|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

EP 15. Para que números complexos $z \neq 0$ temos que $\sqrt{z/\overline{z}} = z/|z|$?

EP 16. Sejam z e w dois números complexos não nulos. Mostre que

$$\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z||w| \text{ se e somente se } \arg w = \arg z.$$

EP 17. Seja $c \in \mathbb{C}$ com $|c| < 1$. Mostre que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ se e somente se $|z| \leq 1$, com igualdade ocorrendo se e somente se $|z| = 1$.

EP 18. Prove que $e^{-|z|} \leq |e^z| \leq e^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

EP 19. Conclua a demonstração da Proposição 1.6.

EP 20. Verifique que

$$\operatorname{Log}(1 - z^2) = \operatorname{Log}(1 - z) + \operatorname{Log}(1 + z) \text{ quando } |z| < 1.$$

O que podemos dizer de $\operatorname{Log}[(1 - z)/(1 + z)]$ para tais valores de z?

EP 21. Expresse os seguintes números complexos na forma $x + yi$:

(a) $\operatorname{Log}(-e^3) + i^i$.

(b) $(-1)^i \operatorname{Log}(-i)$.

EP 22. Calcule todas as λ-potências de z quando:

(a) $z = ie^{\pi}$ e $\lambda = i$.

(b) $z = 1$ e $\lambda = 2 - i$.

EP 23. Dê exemplos mostrando que é possível termos:

(a) $(zw)^{\lambda} \neq z^{\lambda} w^{\lambda}$.

(b) $(z^{\lambda})^{\mu} \neq z^{\lambda\mu}$.