rema 3.23. *Seja $f : A \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Se $B \subset A$ é um* *unto conexo, então $f(B)$ é um conjunto conexo.*

nonstração. Suponhamos, por absurdo, que $f(B)$ admite uma cisão não al $f(B) = V \cup W$. Consideremos os conjuntos

$$V_1 = \{b \in B : f(b) \in V\} \quad \text{e} \quad W_1 = \{b \in B : f(b) \in W\}.$$

os que V_1 e W_1 são subconjuntos não vazios de B tais que $B = V_1 \cup W_1$. no f é contínua, $f(\overline{X} \cap A) \subset \overline{f(X)}$ para todo $X \subset A$ (veja ER 6). Daí segue $V_1 \cap \overline{W_1} = \emptyset$ e $\overline{V_1} \cap W_1 = \emptyset$, já que $V \cap \overline{W} = \emptyset$ e $\overline{V} \cap W = \emptyset$. Isto mostra B admite a cisão não trivial $B = V_1 \cup W_1$, o que é uma contradição. ■

Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é dito *totalmente desconexo* se os únicos subconjuntos exos de A são os subconjuntos unitários e o vazio. Veremos a seguir um nplo de conjunto totalmente desconexo que nos será útil no Capítulo 5.

emplo 3.24. $\mathbb{Z}$ é totalmente desconexo. De fato, seja A um subconjunto de om mais de um elemento. Fixe $a \in A$ e considere $V = \{a\}$ e $W = A \backslash \{a\}$. nos que $A = V \cup W$, $V \cap \overline{W} = V \cap W = \emptyset$ e $\overline{V} \cap W = V \cap W = \emptyset$. Como A mais de um elemento, $W \neq \emptyset$. Isto mostra que A admite uma cisão não ial e, portanto, A não é conexo.

Terminamos esta seção com a importante noção de componente conexa. a $A \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $C \subset A$ é uma *componente conexa* de A se C é um conjunto conexo maximal de A. Em outras palavras, C é um subconjunto exo de A que não está contido propriamente em qualquer outro subconjunto exo de A. O próximo resultado mostra que todo subconjunto não vazio de e escreve como união disjunta de suas componentes conexas.

orema 3.25. *Para todo subconjunto não vazio A de $\mathbb{C}$, as componentes nexas de A formam uma partição de A.*

monstração. Tomemos $a \in A$ e seja $C(a)$ a união de todos os subconjuntos nexos de A que contêm a. Claramente $C(a)$ contém a, pois o conjunto

$\{a\}$ é conexo. Se mostrarmos que $C(a)$ é conexo, teremos que $C(a)$ é um subconjunto conexo maximal de A, ou seja, $C(a)$ é uma componente conexa de A. Suponhamos, por absurdo, que $C(a)$ possui uma cisão não trivial $C(a) = V \cup W$. Suponhamos que $a \in V$ e fixemos $b \in W$. Como $b \in C(a)$, existe um conjunto conexo $A_0 \subset A$ que contém a e b. Logo, $A_0 = (A_0 \cap V) \cup (A_0 \cap W)$ é uma cisão não trivial de A_0, o que é um absurdo. Logo, $C(a)$ é conexo.

Vejamos agora que duas componentes conexas de A ou são idênticas ou são disjuntas. De fato, suponhamos $z \in C(a) \cap C(b)$. Então, $C(a) \subset C(z)$ pela definição de $C(z)$ e pela conexidade de $C(a)$. Daí, $a \in C(z)$, implicando que $C(z) \subset C(a)$. Logo, $C(z) = C(a)$. Com o mesmo raciocínio obtemos $C(z) = C(b)$, donde $C(a) = C(b)$. ■

3.8 Exercícios resolvidos

ER 1.

(a) Prove que todo disco aberto $\Delta(z, r)$ é um conjunto aberto.

(b) Prove que todo disco fechado $\overline{\Delta}(z, r)$ é um conjunto fechado.

ER 2.

(a) Dê um exemplo de uma sequência (A_n) de conjuntos abertos cuja interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ não é um conjunto aberto.

(b) Dê um exemplo de uma sequência (F_n) de conjuntos fechados cuja união $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ não é um conjunto fechado.

ER 3.

(a) Seja A um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e seja $E \subset A$ um conjunto que não possui pontos de acumulação em A. Mostre que $A \backslash E$ é um conjunto aberto.

(b) Seja D uma região em $\mathbb{C}$ e seja $E \subset D$ um conjunto que não possui pontos de acumulação em D. Mostre que $D \backslash E$ é uma região.

ER 4. O que podemos dizer de $\lim_{n\to+\infty} z^n$ quando $z \in \mathbb{C}$?

ER 5.

(a) Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$. Mostre que z é um ponto de acumulação de A se e somente se existe uma sequência (z_n) de elementos distintos de A tal que $z_n \to z$.

(b) Mostre que todo conjunto infinito e limitado $A \subset \mathbb{C}$ possui pelo menos um ponto de acumulação.

ER 6. Seja $f : A \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Prove que $f(\overline{X} \cap A) \subset \overline{f(X)}$ para todo $X \subset A$.

ER 7. Um subconjunto C de $\mathbb{C}$ é dito *convexo* se o segmento

$$[z, w] = \{(1-t)z + tw : t \in [0,1]\}$$

está contido em C sempre que $z, w \in C$. Prove que todo conjunto convexo é conexo.

ER 8. Verifique que as componentes conexas de um conjunto aberto são conjuntos abertos.

3.9 Exercícios propostos

EP 1. Demonstre a Proposição 3.1 e a Proposição 3.2.

EP 2. Classifique cada um dos conjuntos abaixo como aberto, fechado ou nem aberto e nem fechado:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$.

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$.

EP 3. Determine o fecho, a fronteira e o interior de cada um dos conjuntos apresentados no exercício anterior.

EP 4. Demonstre os itens (a) e (b) da Proposição 3.3.

EP 5. Dado $A \subset \mathbb{C}$, mostre que

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Fr} A = \emptyset \quad \text{e} \quad \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A = \overline{A}.$$

EP 6.

(a) Mostre que toda sequência convergente em $\mathbb{C}$ é limitada.

(b) Dê um exemplo de uma sequência limitada em $\mathbb{C}$ que não é convergente.

EP 7. Calcule o limite da sequência (z_n) quando:

(a) $z_n = i^{n!} + 2^{-n}$.

(b) $z_n = \dfrac{in^3 + 1}{2n^3 + n^2}$.

(c) $z_n = \dfrac{z^n}{n!}$, onde $z \in \mathbb{C}$.

$z^n = \frac{|z|^n}{n!}(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

$e^{|z|}$

EP 8. Sejam $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

EP 9. Demonstre a Proposição 3.6.

EP 10. Uma sequência (z_n) em $\mathbb{C}$ é dita uma *sequência de Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|z_m - z_n| < \epsilon \text{ sempre que } m \geq N \text{ e } n \geq N.$$

(a) Demonstre o seguinte resultado:

Teorema (Critério de Cauchy para convergência). *Uma sequência* (z_n) *em* $\mathbb{C}$ *é convergente se e somente se ela é uma sequência de Cauchy.*

(O interessante no critério de Cauchy é que ele nos fornece uma maneira de provarmos que o limite de uma sequência existe sem que tenhamos que identificar este limite a priori.)

(b) Defina $z_1 = 1$, $z_2 = i$ e $z_n = (z_{n-2} + z_{n-1})/2$ para $n \geq 3$. Usando o item (a), prove que (z_n) é uma sequência convergente.

(Sugestão: observe que $|z_{n+1} - z_n| = \dfrac{|z_2 - z_1|}{2^{n-1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$.)

EP 11. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{z\to i}[4z^2 + \cos(z-i) + z\operatorname{Arg}\overline{z}]$.

(b) $\lim\limits_{z\to i}[(z^4-1)/(z-i)]$.

(c) $\lim\limits_{z\to -i}[(z^3+z)/(z+i)]$.

(d) $\lim\limits_{z\to 1}[(\sqrt{z}-1)/(z-1)]$.

(e) $\lim\limits_{z\to 0}[(\cos z + z\operatorname{Log} z)/(e^z - z^2\operatorname{Arg} z)]$.

EP 12. Demonstre as Proposições 3.10, 3.11 e 3.12.

EP 13. Demonstre a Proposição 3.14 e a Proposição 3.15.

EP 14. Quais dos conjuntos abaixo são conexos? E compactos?

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \neq 1\}$.

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : z^3 \notin \mathbb{R}\}$.

EP 15. Sejam $K \subset \mathbb{C}$ compacto e $f : K \to \mathbb{C}$ contínua com $f(z) \neq 0$ para todo $z \in K$. Prove que $f(K) \subset \mathbb{C}\backslash\Delta(0,r)$ para algum $r > 0$.

EP 16. Sejam $K \subset \mathbb{C}$ compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que f assume máximo e mínimo em K, ou seja, que existem pontos $\alpha, \beta \in K$ tais que

$$f(\alpha) \leq f(z) \leq f(\beta) \text{ para todo } z \in K.$$

EP 17. Sejam $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ com $f(A) \subset B$. Suponhamos que z_0 é um ponto de acumulação de A e que existe $w_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Se g é contínua em w_0, mostre que $\lim\limits_{z\to z_0} g(f(z)) = g(\lim\limits_{z\to z_0} f(z))$.

Dúvida

EP 18. Sejam D uma região e $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua satisfazendo $e^{f(z)} = 1$ para todo $z \in D$. Mostre que f é uma função constante cujo valor pertence ao conjunto $\{2k\pi i : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

EP 19. Suponhamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua tal que

(i) $|f(z)| \to +\infty$ quando $|z| \to +\infty$,

(ii) $f(\mathbb{C})$ é um conjunto aberto.

Prove que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.