...ercícios resolvidos

..., diretamente da definição de derivada, que a função $f(z) = 1/z$ ...el em todo ponto de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ e que

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \text{ para todo } z \neq 0.$$

...stre que a função $f(z) = e^{z^2}$ é uma função inteira. Qual é a sua

...la uma função analítica $f : A \to \mathbb{C}$, dizemos que $z_0 \in A$ é um *ponto* ... f se $f'(z_0) = 0$. Calcule todos os pontos críticos da função inteira ...$^{-3z^2+6z}$.

...ando as equações de Cauchy-Riemann, determine os pontos de dife... ...lade da função $f(z) = |z|^2$.

...ove a seguinte "versão complexa" da regra de L'Hôpital : Sejam f e ... diferenciáveis em z_0 com $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Se $g'(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

...Calcule os seguintes limites:

...$_{z\to 0} |z|^2/z$.

...$_{z\to 0}(\operatorname{sen} az)/(\operatorname{sen} z)$, onde $a \in \mathbb{C}$.

... Determine a função inteira $f = u + iv$ que satisfaz $f(0) = 2$ e $v(z) =$ ...$+ \operatorname{sen} y + y \cos y)e^x$.

... Suponha que uma função $f = u + iv$ é analítica em uma região D e ...$z) = [u(z)]^2$ para todo $z \in D$. Prove que f é constante em D.

... Determine o maior conjunto aberto A em $\mathbb{C}$ no qual a função $f(z) =$ ...$^3 + 1)$ é analítica, e compute $f'(z)$ para $z \in A$.

$D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

ER 11. Mostre que a equação

$$A|z|^2 + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0,$$

onde $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ e $|B|^2 - AC > 0$, determina um círculo em $\mathbb{C}$ se $A \neq 0$ e uma reta em $\mathbb{C}$ se $A = 0$. Mostre que, reciprocamente, todo círculo ou reta em $\mathbb{C}$ é determinado por uma tal equação.

ER 12. Sejam

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

duas transformações de Möbius. Mostre que $f = g$ se e somente se existe um número complexo não nulo λ tal que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ e $d' = \lambda d$.

ER 13. Sejam (z_1, z_2, z_3, z_4) e (w_1, w_2, w_3, w_4) duas 4-uplas de pontos distintos em $\mathbb{C}_\infty$. Mostre que

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

se e somente se existe uma transformação de Möbius f tal que $f(z_j) = w_j$ para $j = 1, 2, 3, 4$.

4.8 Exercícios propostos

EP 1. Usando apenas a definição de derivada, mostre que a função $f(z) = 3ze^{iz} + |z|^2 + 4$ é diferenciável em 0 e calcule $f'(0)$.

EP 2. Conclua a demonstração da Proposição 4.3.

EP 3. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Determine os seguintes limites usando a regra da cadeia:

(a) $\lim_{z\to 0} f(2z)/z$.