b) $\lim_{z\to 0} f(z^2 - z)/z$.

c) $\lim_{z\to i} f(z^2 + 1)/(z - i)$.

P 4. Calcule todos os pontos críticos das funções inteiras $f(z) = (\operatorname{sen} z)^2$ e
z) $= \operatorname{sen}(z^2)$.

P 5. Sejam A um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função analítica.
nsidere o conjunto aberto $A^* = \{\overline{z} : z \in A\}$ e defina $g : A^* \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad (z \in A^*).$$

ove que g é uma função analítica e que

$$g'(z) = \overline{f'(\overline{z})} \text{ para todo } z \in A^*.$$

P 6. Em que pontos a função $f(z) = |z|$ é diferenciável?

P 7. Para cada uma das funções abaixo, determine o maior conjunto aberto
n $\mathbb{C}$ no qual a função é analítica e calcule sua derivada.

(a) $f(z) = z^4 - 2iz^3 + 1$.

(b) $g(z) = (z - 2i)/(z + 2i)$.

(c) $h(z) = z^2(1 - \sec z)$.

(d) $k(z) = \sqrt{4 - z^2}$.

(e) $s(z) = 1/(z - 2\sqrt{z})$.

(f) $t(z) = \sqrt{e^z}$.

P 8. Prove ou dê um contra-exemplo: Se Δ é um disco aberto em $\mathbb{C}$ e
: $\Delta \to \mathbb{C}$ é uma função analítica, então f é limitada em Δ.

P 9. Calcule os seguintes limites, caso eles existam:

(a) $\lim_{z\to 0}(e^z - 1)/(3z)$.

(b) $\lim_{z\to 0}(2\operatorname{sen} z)/(e^z - 1)$.

(c) $\lim_{z\to 0} z^2/|z|$.

EP 10. Em que pontos de $\mathbb{C}$ a função $f(z) = \operatorname{Im} z$ é analítica?

EP 11. Ache uma função polinomial de x e y que é diferenciável em todo ponto da parábola de equação $y = x^2$, mas em nenhum outro ponto do plano complexo.

EP 12. Sejam D uma região em $\mathbb{C}$ e $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Prove que se $\operatorname{Re} f$ ou $\operatorname{Im} f$ é constante em D, então f é constante em D.

EP 13. Se f e g são funções analíticas definidas em uma região D e se $f'(z) = g'(z)$ para todo $z \in D$, prove que f e g diferem por uma constante.

EP 14. Se uma função f é analítica em uma região D e satisfaz a equação $f' - \alpha f = 0$ em D, onde α é uma constante complexa, prove que f é da forma $f(z) = Ae^{\alpha z}$ $(z \in D)$ para alguma constante complexa A.

EP 15. Seja f uma função definida em uma região D e seja $n \in \mathbb{N}^*$. Se $f^{(k)}$ existe em D para todo $1 \leq k \leq n$ e se $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $z \in D$, prove que f é um polinômio de grau no máximo $n - 1$.

EP 16. Verifique que a fórmula $f(z) = \cos(\sqrt{z})$ define uma função inteira, enquanto que $g(z) = \operatorname{sen}(\sqrt{z})$ não.

EP 17. Seja $g : \mathbb{C}\backslash[0, +\infty[\to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \sqrt{z}$ se $\operatorname{Im} z \geq 0$ e $g(z) = -\sqrt{z}$ se $\operatorname{Im} z < 0$. Mostre que g é um ramo analítico da raiz quadrada em $\mathbb{C}\backslash[0, +\infty[$.

EP 18. Exiba todos os três ramos analíticos da raiz cúbica na região $D = \mathbb{C}\backslash] - \infty, 0]$.

EP 19. Em quais das seguintes regiões é possível definir um ramo analítico do logaritmo? Justifique sua reposta e exiba um tal ramo nas regiões onde isto for possível.