Aula de hoje

1. Teorema da Função Implícita;
2. Aplicações
   1. Ponto fixo de famílias
   2. Raízes simples de polinômios
   3. O teorema da função inversa

Notação

- Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ escreveremos

$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$

Notação

- Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ escreveremos
$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$
- Se $A : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ é linear, então pordemos escrever $A = A_x + A_y$, em que
$$A_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \text{ e } A_y : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

Theorem (Função Implícita)

Sejam $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *um aberto,* $p = (x_0, y_0) \in A$ *um ponto e* $f : A \to \mathbb{R}^k$ *uma função de classe* C^1 *tal que* $f(x_0, y_0) = c$ *e é invertível a matriz*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right] \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(p) \end{bmatrix}$$

Nestas condições, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ *e* $V \subset \mathbb{R}^k$ *tais que:*

1. $p = (x_0, y_0) \in U \times V \subset A$;
2. *para cada* $x \in U$*, existe único* $y = y(x) \in V$ *satisfazendo*

   $$f(x, y(x)) = c,$$

   com y *de classe* C^1 *em* U.

Observações

- A equação $f(x, y(x)) = c$ pode ser escrita como o sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n)) = c_1 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n)) = c_2 \\ \vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n)) = c_k \end{cases}$$

Observações

- A equação $f(x, y(x)) = c$ pode ser escrita como o sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_k(x_1,\dots,x_n)) = c_1 \\ f_2(x_1,\dots,x_n,y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_k(x_1,\dots,x_n)) = c_2 \\ \vdots \\ f_k(x_1,\dots,x_n,y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_k(x_1,\dots,x_n)) = c_k \end{cases}$$

- Derivando cada linha com respeito a x_ℓ obtemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}(x,y) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_\ell}{\partial y_j}(x,y)\frac{\partial y_j}{\partial x_\ell}(x,y),\ \ \ell \in \{1,\dots,n\}$$

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_\ell}(x,y) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}(x,y) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(x,y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_\ell}(x,y) \\ \vdots \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_\ell}(x,y) \end{bmatrix}$$

Assim, para $p = (x, y)$ temos:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_\ell}(p) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_k}{\partial x_\ell}(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(p) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial y_1}(p) & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial y_k}(p) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\ell}(p) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_\ell}(p) \end{bmatrix}$$

- Note que estamos calculando $y'(p)$ sem precisar determinar y.

Demonstração - Via função inversa

Considere a função $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ definida por

$$F(x,y) = (x, f(x,y))$$

Note que:

- $F(p) = (x_0, f(x_0,y_0))$;
- $\det(F'(x_0,y_0)) \neq 0$;
- Pelo teorema da função inversa, existem abertos

  $$(x_0,y_0) \in U \times V \subset A \text{ e } (x_0, f(x_0,y_0) \in) W = E \times B$$

  tais que

  $$F : U \times V \to W$$

  é inversivel, com inversa C^1.

- Considere $G : W \to U \times V$ a inversa de F. Uma vez que $F(x, y) = (x, f(x, y))$, então

$$G(x, y) = (x, \kappa(x, y)),$$

sendo κ de classe C^1.

- Considere $G : W \to U \times V$ a inversa de F. Uma vez que $F(x,y) = (x, f(x,y))$, então

$$G(x,y) = (x, \kappa(x,y)),$$

sendo κ de classe C^1.
- Considere também a projeção $\pi_y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.

- Considere $G : W \to U \times V$ a inversa de F. Uma vez que $F(x,y) = (x, f(x,y))$, então

$$G(x,y) = (x, \kappa(x,y)),$$

sendo κ de classe C^1.
- Considere também a projeção $\pi_y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.
- Temos

$$\pi_y \circ F = f \ \text{ e } \ f(x, \kappa(x,y)) = y.$$

Aplicação 1: Ponto fixo de famílias

Considere uma família de funções

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ a um parâmetro real } \lambda,$$

de modo que

$$f_\lambda(x) = f(\lambda, x), \text{ seja de classe } C^1.$$

Suponha também que f_{λ_0} possua um ponto fixo x_0.

Aplicação 1: Ponto fixo de famílias

Considere uma família de funções

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{a um parâmetro real} \quad \lambda,$$

de modo que

$$f_\lambda(x) = f(\lambda, x), \quad \text{seja de classe} \quad C^1.$$

Suponha também que f_{λ_0} possua um ponto fixo x_0.

Afirmação

Sob certas condições, f_λ possui único ponto fixo próximo de x_0, para todo λ próximo de λ_0.

- Considere a função

$$\widehat{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{definida por}\ \widehat{f}(x,y)=f_y(x).$$

- Considere a função

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } \widehat{f}(x, y) = f_y(x).$$

- Suponha que para um certo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tenhamos $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$.
- Admita agora que

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x}(x_0, \lambda_0) \neq 1$$

- Considere a função

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } \widehat{f}(x,y) = f_y(x).$$

- Suponha que para um certo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tenhamos $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$.
- Admita agora que

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x}(x_0, \lambda_0) \neq 1$$

- Por fim, defina $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo

$$F(x,y) = \widehat{f}(x,y) - x.$$

Aplicação 2: Raízes simples de polinômios

Considere o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

e suponha que $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raíz simples.

Aplicação 2: Raízes simples de polinômios

Considere o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

e suponha que $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raíz simples.

Afirmação

Existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ do ponto $(a_0, \ldots, a_n)$, tal que $(b_0, \ldots, b_n) \in U$ implica em

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

possuir uma raíz real e simples próxima de x_0.

- Suponha x_0 uma raiz simples de $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$.
- Utilizemos as notações

$$a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \;\text{ e }\; b = (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

- Suponha x_0 uma raiz simples de $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$.
- Utilizemos as notações

$$a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ b = (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

- Defina a função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ pondo

$$F(x, b) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

- Suponha x_0 uma raiz simples de $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$.
- Utilizemos as notações

$$a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ b = (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

- Defina a função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ pondo

$$F(x, b) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

- Note que

$$F(x_0, a) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, a) \neq 0.$$

Aplicação 3: O teorema da função inversa

Theorem

Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : E \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 em E de modo que $f'(a)$ é invertível, para algum $a \in E$. Denotando $b = f(a)$ obtêm-se:

1. *Existem abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in U$ e $b \in V$, tais que $f : U \to V$ é bijetiva;*
2. *se $g : V \to U$ denota a inversa de f, definida por*

$$g(f(x)) = x, \ \forall x \in U,$$

então g é de classe C^1 em V.

Demonstração (via função implícita)

Considere a função

$$F : E \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

dada por

$$F(x,y) = f(x) - y$$

Demonstração (via função implícita)

Considere a função

$$F : E \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

dada por

$$F(x,y) = f(x) - y$$

- Note que $F(a,b) = 0$ e

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\right] = f'(a)$$

Demonstração (via função implícita)

Considere a função

$$F : E \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

dada por

$$F(x,y) = f(x) - y$$

- Note que $F(a,b) = 0$ e

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\right] = f'(a)$$

- Podemos aplicar o teorema da função implícita. Obtemos então abertos

$$a \in U \subset E \ \text{ e } \ b \in V,$$

tais que $x = x(y)$ é de classe C^1 e, além disso,

$$F(x(y),y) = 0 \ \Rightarrow \ f(x(y)) = y.$$