Aula de hoje

1. Teorema da função inversa;
2. Demonstração do teorema:
    - Pontos fixos de contrações;

Motivação

Theorem

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivável tal que*

$$f'(x) \neq 0, \ \forall x \in I.$$

Nestas condições, valem as seguintes afirmações:

Motivação

Theorem

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivável tal que*

$$f'(x) \neq 0, \; \forall x \in I.$$

Nestas condições, valem as seguintes afirmações:

1. $f : I \to f(I)$ *é uma bijeção;*
2. *a função inversa* $f^{-1} : f(I) \to I$ *é derivável;*
3. f *é uma aplicação aberta em* I *(*$A \subset I$ *aberto implica* $f(A)$ *aberto.)*

Objetivo da aula

Theorem

Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $f : E \to \mathbb{R}^n$ *uma função de classe* C^1 *em* E *de modo que* $f'(a)$ *é invertível, para algum* $a \in E$*. Denotando* $b = f(a)$ *obtêm-se:*

Objetivo da aula

Theorem

Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : E \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 em E de modo que $f'(a)$ é invertível, para algum $a \in E$. Denotando $b = f(a)$ obtêm-se:

1. *Existem abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in U$ e $b \in V$, tais que $f : U \to V$ é bijetiva;*
2. *se $g : V \to U$ denota a inversa de f, definida por*

$$g(f(x)) = x, \ \forall x \in U,$$

   então g é de classe C^1 em V.

Observações

Observações

1. A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é aberta;

Observações

1. A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é aberta;
2. $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$;

Observações

1. A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é aberta;
2. $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$;
3. Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é C^1 e $det(df_x) \neq 0$, para cada $x \in E$, então f é uma aplicação aberta.

Observações

1. A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é aberta;
2. $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$;
3. Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é C^1 e $det(df_x) \neq 0$, para cada $x \in E$, então f é uma aplicação aberta.
4. para $x \in U$ e $y \in V$ temos que os sistemas

Observações

1. A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é aberta;
2. $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$;
3. Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é C^1 e $det(df_x) \neq 0$, para cada $x \in E$, então f é uma aplicação aberta.
4. para $x \in U$ e $y \in V$ temos que os sistemas

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, n_n),\ j \in \{1, \ldots, n\},$$

Observações

1. A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é aberta;
2. $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$;
3. Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é C^1 e $det(df_x) \neq 0$, para cada $x \in E$, então f é uma aplicação aberta.
4. para $x \in U$ e $y \in V$ temos que os sistemas

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, n_n),\ j \in \{1, \ldots, n\},$$

possuem única solução, supondo x próximo de a e y próximo de $b = f(a)$.

Ponto fixo de Banach

Definition

Sejam M um espaço métrico, $p \in M$ um ponto e $f : M \to M$ uma função. Dizemos que:

1. p é um ponto fixo de f se $f(p) = p$;
2. f é uma contração se existe $0 < c < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leqslant c d(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

Ponto fixo de Banach

Definition

Sejam M um espaço métrico, $p \in M$ um ponto e $f : M \to M$ uma função. Dizemos que:

1. p é um ponto fixo de f se $f(p) = p$;
2. f é uma contração se existe $0 < c < 1$ tal que
$$d(f(x), f(y)) \leqslant cd(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

Theorem

Num espaço métrico completo toda conttração possui um único ponto fixo.

Ferramentas

Ferramentas

Lemma (1)

Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e $f : F \to F$ é uma contração, então existe único $x \in F$ tal que $f(x) = x$.

Ferramentas

Lemma (1)

Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e $f : F \to F$ é uma contração, então existe único $x \in F$ tal que $f(x) = x$.

Lemma (2)

Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto convexo $f : E \to \mathbb{R}^n$ é diferenciáve, com $\|f'(x)\| \leqslant M$, então

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant M\|x - y\|, \ \forall x, y \in E.$$

Ferramentas

Lemma (1)

Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e $f : F \to F$ é uma contração, então existe único $x \in F$ tal que $f(x) = x$.

Lemma (2)

Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto convexo $f : E \to \mathbb{R}^n$ é diferenciáve, com $\|f'(x)\| \leqslant M$, então

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant M\|x - y\|, \ \forall x, y \in E.$$

Lemma (3)

Considere $Aut(\mathbb{R}^n) \subset End(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das tranformações inversíveis.

1. *Se $A \in Aut(\mathbb{R}^n)$ e $B \in End(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1 \ \Rightarrow \ B \in Aut(\mathbb{R}^n)$$

2. *$Aut(\mathbb{R}^n) \subset End(\mathbb{R}^n)$ é aberto e $A \mapsto A^{-1}$ é contínua.*

Demonstração do teorema

Demonstração do teorema

- Primeiramente, defina $A = f'(a) \in Aut(\mathbb{R}^n)$ e
$$0 < \lambda = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}.$$
Como f' é contínua, segue a existência de uma bola aberta U, centro em a, tal que
$$x \in U \subset E \;\Rightarrow\; \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$

Demonstração do teorema

- Primeiramente, defina $A = f'(a) \in Aut(\mathbb{R}^n)$ e

$$0 < \lambda = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}.$$

Como f' é contínua, segue a existência de uma bola aberta U, centro em a, tal que

$$x \in U \subset E \;\Rightarrow\; \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$

- Fixado $y \in \mathbb{R}^n$, defina a função $\varphi_y : E \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$\varphi_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x)).$$

- Note que

$$
\begin{aligned}
\varphi_y'(x) &= I + A^{-1}(f'(x)) \\
&= A^{-1}(A - f'(x)) \\
&= A^{-1}(f'(a) - f'(x)).
\end{aligned}
$$

- Note que

$$\begin{aligned}\varphi_y'(x) &= I + A^{-1}(f'(x))\\ &= A^{-1}(A - f'(x))\\ &= A^{-1}(f'(a) - f'(x)).\end{aligned}$$

- Temos que f é injetiva em U.

Defina $V = f(U)$. Mostraremos que V é um aberto.

- Considere $y_0 \in V$ e $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$.

Defina $V = f(U)$. Mostraremos que V é um aberto.

- Considere $y_0 \in V$ e $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$.
- Escolha $r > 0$ tal que $B_{x_0} = B(x_0, r) \subset U$ e $\overline{B_{x_0}} \subset U$.

Defina $V = f(U)$. Mostraremos que V é um aberto.

- Considere $y_0 \in V$ e $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$.
- Escolha $r > 0$ tal que $B_{x_0} = B(x_0, r) \subset U$ e $\overline{B_{x_0}} \subset U$.
- Mostraremos que $B_{y_0} = B(y_0, r\lambda) \subset V$.

Defina $V = f(U)$. Mostraremos que V é um aberto.

- Considere $y_0 \in V$ e $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$.
- Escolha $r > 0$ tal que $B_{x_0} = B(x_0, r) \subset U$ e $\overline{B_{x_0}} \subset U$.
- Mostraremos que $B_{y_0} = B(y_0, r\lambda) \subset V$.

Para tanto, considere $y \in B_{y_0}$:

- $\|\varphi_y(x_0) - x_0\| < r/2$;

Defina $V = f(U)$. Mostraremos que V é um aberto.

- Considere $y_0 \in V$ e $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$.
- Escolha $r > 0$ tal que $B_{x_0} = B(x_0, r) \subset U$ e $\overline{B_{x_0}} \subset U$.
- Mostraremos que $B_{y_0} = B(y_0, r\lambda) \subset V$.

Para tanto, considere $y \in B_{y_0}$:

- $\|\varphi_y(x_0) - x_0\| < r/2$;
- se $x \in \overline{B_{x_0}}$, então $\|\varphi_y(x) - x_0\| < r$;

Defina $V = f(U)$. Mostraremos que V é um aberto.

- Considere $y_0 \in V$ e $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$.
- Escolha $r > 0$ tal que $B_{x_0} = B(x_0, r) \subset U$ e $\overline{B_{x_0}} \subset U$.
- Mostraremos que $B_{y_0} = B(y_0, r\lambda) \subset V$.

Para tanto, considere $y \in B_{y_0}$:

- $\|\varphi_y(x_0) - x_0\| < r/2$;
- se $x \in \overline{B_{x_0}}$, então $\|\varphi_y(x) - x_0\| < r$;
- $\varphi_y : \overline{B_{x_0}} \to \overline{B_{x_0}}$ é uma contração;

Defina $V = f(U)$. Mostraremos que V é um aberto.

- Considere $y_0 \in V$ e $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$.
- Escolha $r > 0$ tal que $B_{x_0} = B(x_0, r) \subset U$ e $\overline{B_{x_0}} \subset U$.
- Mostraremos que $B_{y_0} = B(y_0, r\lambda) \subset V$.

Para tanto, considere $y \in B_{y_0}$:

- $\|\varphi_y(x_0) - x_0\| < r/2$;
- se $x \in \overline{B_{x_0}}$, então $\|\varphi_y(x) - x_0\| < r$;
- $\varphi_y : \overline{B_{x_0}} \to \overline{B_{x_0}}$ é uma contração;
- V é aberto;

Defina $V = f(U)$. Mostraremos que V é um aberto.

- Considere $y_0 \in V$ e $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$.
- Escolha $r > 0$ tal que $B_{x_0} = B(x_0, r) \subset U$ e $\overline{B_{x_0}} \subset U$.
- Mostraremos que $B_{y_0} = B(y_0, r\lambda) \subset V$.

Para tanto, considere $y \in B_{y_0}$:

- $\|\varphi_y(x_0) - x_0\| < r/2$;
- se $x \in \overline{B_{x_0}}$, então $\|\varphi_y(x) - x_0\| < r$;
- $\varphi_y : \overline{B_{x_0}} \to \overline{B_{x_0}}$ é uma contração;
- V é aberto;

Assim, conclui-se o item (1).

Para demonstrar a parte (2), considere

$$y,\ y+k \in V \ \text{ e } \ x,\ x+h \in U,$$

de modo que

$$y = f(x) \ \text{ e } \ y+k = f(x+h).$$

Para demonstrar a parte (2), considere

$$y,\ y+k \in V \ \text{ e } \ x,\ x+h \in U,$$

de modo que

$$y = f(x) \ \text{ e } \ y+k = f(x+h).$$

Obtêm-se:

$$\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) = h - A^{-1}(k)$$

e ainda

$$\|h\| \leqslant \frac{\|k\|}{\lambda}.$$

Aplicação

Aplicação

- Considere o polinômio de coeficientes reais

$$p_0(x) = a_0x^3 - b_0x^2 + c_0x - d_0,$$

e suponha que existam trê raízes reais distintas.

Aplicação

- Considere o polinômio de coeficientes reais

$$p_0(x) = a_0x^3 - b_0x^2 + c_0x - d_0,$$

e suponha que existam trê raízes reais distintas.

- Considere o polinômio de coeficientes reais

$$p(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d.$$

Aplicação

- Considere o polinômio de coeficientes reais

$$p_0(x) = a_0x^3 - b_0x^2 + c_0x - d_0,$$

  e suponha que existam trê raízes reais distintas.
- Considere o polinômio de coeficientes reais

$$p(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d.$$

Afirmação:

Nestas condições, se $(a, -b, c, -d)$ está suficientemente próximo de $(a_0, -b_0, c_0, -d_0)$, então $p(x)$ possui três raízes reais distintas.

Considere x_0, y_0 e z_0 as raízes de p_0 e a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (x + y + z, xy + xz + yz, xyz)$$

Note que:

Considere x_0, y_0 e z_0 as raízes de p_0 e a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x,y,z) = (x+y+z, xy+xz+yz, xyz)$$

Note que:

- $F(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{b_0}{a_0}, \dfrac{c_0}{a_0}, \dfrac{d_0}{a_0}\right)$

Considere x_0, y_0 e z_0 as raízes de p_0 e a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (x + y + z, xy + xz + yz, xyz)$$

Note que:

- $F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{b_0}{a_0}, \frac{c_0}{a_0}, \frac{d_0}{a_0} \right)$
- $DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_0 + z_0 & x_0 + z_0 & x_0 + y_0 \\ y_0 z_0 & z_0 x_0 & y_0 x_0 \end{bmatrix}$

Considere x_0, y_0 e z_0 as raízes de p_0 e a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (x + y + z, xy + xz + yz, xyz)$$

Note que:

- $F(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{b_0}{a_0}, \dfrac{c_0}{a_0}, \dfrac{d_0}{a_0}\right)$
- $DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_0 + z_0 & x_0 + z_0 & x_0 + y_0 \\ y_0 z_0 & z_0 x_0 & y_0 x_0 \end{bmatrix}$
- $\det(DF(x_0, y_0, z_0)) = (z_0 - x_0)(z_0 - y_0)(x_0 - y_0) \neq 0$

Por fim, note que a aplicação

$$\varphi(a,b,c,d) = \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right)$$

é contínua em (a_0, b_0, c_0, d_0).

Notação

- Dados $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ escreveremos

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$

Notação

- Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ escreveremos
$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$
- Se $A : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ é linear, então pordemos escrever $A = A_x + A_y$, em que
$$A_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \text{ e } A_y : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

Theorem (Função Implícita)

Sejam $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto, $p = (x_0, y_0) \in A$ um ponto e $f : A \to \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1 tal que $f(x_0, y_0) = c$ e é invertível a matriz

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right] \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(p) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(p) \end{bmatrix}$$

Nestas condições, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ tais que:

1. $p = (x_0, y_0) \in U \times V \subset A$;
2. *para cada $x \in U$, existe único $y = y(x) \in V$ satisfazendo*

$$f(x, y(x)) = c,$$

com y de classe C^1 em U.