Aula de hoje

1. Multiplicadores de Lagrange;

Definition (Hiperfície)

Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é dito uma hiperfície (de dimensão n e classe C^1) se é, localmente, o gráfico de uma função $\xi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^1 .

Isso quer dizer:

Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contendo p e uma função de classe C^1

$$\xi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

tais que

$$V \cap M = graf(\xi),$$

ou seja, para algum $i \in \{1, \ldots, n+1\}$

$$V \cap M = \{(x_1, \ldots, x_{n+1});\ x_i = \xi(\widehat{x_i})\},$$

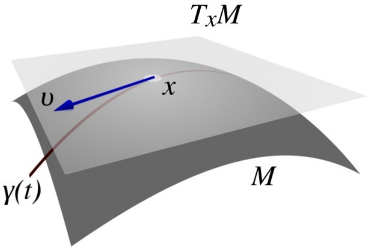
O espaço T_pM

Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície e $p \in M$. O espaço tangente a M no ponto p é o conjunto

$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^{n+1};\ \text{existe}\ \ \gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to M,\ \gamma(0) = p\ \ \text{e}\ \ \gamma'(0) = v\}$$

Theorem

O conjunto T_pM é um espaço vetorial de dimensão n.



Definition

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f se

$$\nabla f(x) \neq 0, \ \forall x \in f^{-1}(c).$$

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e c um valor regular. Nestas condições, temos que

$$M = f^{-1}(c) = \{x \in U;\, f(x) = c\}$$

é uma hiperfície. Mais ainda,

$$T_pM = [\nabla f(p)]^{\perp}, \ \forall p \in f^{-1}(c).$$

Multiplicador de Lagrange

Objetivo

Procurar pontos críticos de restrições

$$f\,|_M : M \to \mathbb{R},\ M = \varphi^{-1}(c),$$

para c valor regular de $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Definition

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, de classe C^1 e $M = \varphi^{-1}(c) \subset U$ uma hiperfície determinada pelo valor regular c de φ. Dizemos que $p \in M$ é um ponto crítico de $f\,|_M$ se, para toda curva

$$\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to M, \ \text{com}\ \ \gamma(0) = p,$$

tivermos

$$(f \circ \gamma)'(0) = 0.$$

Theorem (Multiplicador de Lagrange)

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$*, de classe* C^1 *e* $M = \varphi^{-1}(c) \subset U$ *uma hiperfície determinada pelo valor regular* c *de* φ*. Nestas condições,* $p \in M$ *é ponto crítico de* $f|_M$ *se, e somente se, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla \varphi(p).$$

Remark

Segue desse resultado que p satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \varphi(p) = c \\ \nabla f(p) = \lambda \nabla \varphi(p). \end{cases},$$

Remark

Suponha $f : U \to \mathbb{R}$ *e* $\varphi : U \to \mathbb{R}$ *com* $M = \varphi^{-1}(0)$*. Defina a função* $L : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pondo*

$$L(x,t) = f(x) - t\varphi(x)$$

Exemplos:

1. Obter os pontos da superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 - x^2 y + y^2 = 4\}.$$

Exemplos:

1. Obter os pontos da superfície
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 - x^2y + y^2 = 4\}.$$

2. Considere $\mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ o espaço das matrizes reais 2×2 e as funções $f : \mathbb{M}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dadas por
$$f(X) = \det(X) \ \text{ e } \ \varphi(x_1, \ldots, x_4) = \sum_{j=1}^{4} x_j^2.$$

   Mostre que o ponto de máximo de f, restrita a $M = \varphi^{-1}(2)$, é uma matriz ortogonal. (Podemos fazer o mesmo para $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ e $M = \varphi^{-1}(n)$.)

Exemplos:

1. Obter os pontos da superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 - x^2y + y^2 = 4\}.$$

2. Considere $\mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ o espaço das matrizes reais 2×2 e as funções $f : \mathbb{M}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(X) = \det(X) \ \text{ e } \ \varphi(x_1, \ldots, x_4) = \sum_{j=1}^{4} x_j^2.$$

   Mostre que o ponto de máximo de f, restrita a $M = \varphi^{-1}(2)$, é uma matriz ortogonal. (Podemos fazer o mesmo para $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ e $M = \varphi^{-1}(n)$.)

3. A média geométrica entre n de números positivos é menor, ou igual, do que a média aritmética entre eles.

$$Dica:\ \ f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j \ \text{ e } \ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Teorema Fundamental da Álgebra

Theorem

Considere um polinômio

$$F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_j \in \mathbb{C}.$$

Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $F(z_0) = 0$.

Teorema Fundamental da Álgebra

Theorem

Considere um polinômio

$$F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \; a_j \in \mathbb{C}.$$

Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $F(z_0) = 0$.

Demonstração (Theo de Jong):

Para fazer a demonstração, considere:

- $F(z) = F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$;

Theorem

Considere um polinômio

$$F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \; a_j \in \mathbb{C}.$$

Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $F(z_0) = 0$.

Demonstração (Theo de Jong):

Para fazer a demonstração, considere:

- $F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$;
- dado $c \in \mathbb{R}$, defina

$$L_c \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; P(x,y) = c\}, \;\text{ e }\; M_c \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; Q(x,y) = c\}$$

- A ideia é aplicar Lagrange para os conjuntos L_c (ou M_c);

- A ideia é aplicar Lagrange para os conjuntos L_c (ou M_c);
- Precisamos então dos L_c's não singulares, ou seja, aqueles em que temos

$$\nabla P(a,b) = (P_x(a,b), P_y(a,b)) \neq (0,0),\ \forall (a,b) \in L_c.$$

- A ideia é aplicar Lagrange para os conjuntos L_c (ou M_c);
- Precisamos então dos L_c's não singulares, ou seja, aqueles em que temos

$$\nabla P(a,b) = (P_x(a,b), P_y(a,b)) \neq (0,0),\ \forall (a,b) \in L_c.$$

- Mas, $F'(z)$ possui no máximo $n-1$ raízes e, além disso,

$$\begin{aligned} F'(a+ib) &= P_x(a,b) + iQ_x(a,b) \\ &= Q_y(a,b) - iP_y(a,b) \end{aligned}$$

- A ideia é aplicar Lagrange para os conjuntos L_c (ou M_c);
- Precisamos então dos L_c's não singulares, ou seja, aqueles em que temos

$$\nabla P(a,b) = (P_x(a,b), P_y(a,b)) \neq (0,0), \ \forall (a,b) \in L_c.$$

- Mas, $F'(z)$ possui no máximo $n-1$ raízes e, além disso,

$$\begin{aligned} F'(a+ib) &= P_x(a,b) + iQ_x(a,b) \\ &= Q_y(a,b) - iP_y(a,b) \end{aligned}$$

- Assim, existem no máximo finitos L_c's e M_c's que são singulares.

- A ideia é aplicar Lagrange para os conjuntos L_c (ou M_c);
- Precisamos então dos L_c's não singulares, ou seja, aqueles em que temos

$$\nabla P(a,b) = (P_x(a,b), P_y(a,b)) \neq (0,0), \ \forall (a,b) \in L_c.$$

- Mas, $F'(z)$ possui no máximo $n-1$ raízes e, além disso,

$$\begin{aligned} F'(a+ib) &= P_x(a,b) + iQ_x(a,b) \\ &= Q_y(a,b) - iP_y(a,b) \end{aligned}$$

- Assim, existem no máximo finitos L_c's e M_c's que são singulares.
- Se (a,b) é singularidade de L_c, então também é singularidade de M_d, com $d = Q(a,b)$.

Lemma (1)

Suponha $L_c \neq \emptyset$ não singular. Então, existe $(a,b) \in L_c$ tal que $Q(a,b) = 0$.

Lemma (2)

Suponha $M_d \neq \emptyset$ não singular. Então, existe $(p,q) \in M_d$ tal que $P(p,q) = 0$.

Demonstração (do lema 1):

Lemma (1)

Suponha $L_c \neq \emptyset$ não singular. Então, existe $(a,b) \in L_c$ tal que $Q(a,b) = 0$.

Lemma (2)

Suponha $M_d \neq \emptyset$ não singular. Então, existe $(p,q) \in M_d$ tal que $P(p,q) = 0$.

Demonstração (do lema 1):

A ideia é minimizar a função Q^2 restrita ao conjunto L_c.

Definition

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular de φ se

$$\varphi'(x) \text{ é sobrejetiva em cada ponto } x \in \varphi^{-1}(c).$$

Remark

Definition

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular de φ se

$$\varphi'(x) \text{ é sobrejetiva em cada ponto } x \in \varphi^{-1}(c).$$

Remark

1. *Note que isto é equivalente a pedir a independêcia linear do conjunto*

$$\beta_x = \{\nabla\varphi_1(x), \ \ldots, \nabla\varphi_k(x)\}, \ \forall x \in \varphi^{-1}(c).$$

Definition

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular de φ se

$$\varphi'(x) \text{ é sobrejetiva em cada ponto } x \in \varphi^{-1}(c).$$

Remark

1. *Note que isto é equivalente a pedir a independêcia linear do conjunto*

$$\beta_x = \{\nabla\varphi_1(x), \ldots, \nabla\varphi_k(x)\}, \ \forall x \in \varphi^{-1}(c).$$

2. *Neste caso, dizemos que $M = \varphi^{-1}(c)$ é uma hiperfície de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Definition

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular de φ se

$$\varphi'(x) \text{ é sobrejetiva em cada ponto } x \in \varphi^{-1}(c).$$

Remark

1. *Note que isto é equivalente a pedir a independêcia linear do conjunto*
$$\beta_x = \{\nabla\varphi_1(x), \ \ldots, \nabla\varphi_k(x)\}, \ \forall x \in \varphi^{-1}(c).$$
2. *Neste caso, dizemos que $M = \varphi^{-1}(c)$ é uma hiperfície de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+k}$.*
3. *De modo análogo, define-se T_pM, para cada $p \in M$.*

Definition

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular de φ se

$$\varphi'(x) \text{ é sobrejetiva em cada ponto } x \in \varphi^{-1}(c).$$

Remark

1. *Note que isto é equivalente a pedir a independêcia linear do conjunto*

$$\beta_x = \{\nabla\varphi_1(x), \ \ldots, \nabla\varphi_k(x)\}, \ \forall x \in \varphi^{-1}(c).$$

2. *Neste caso, dizemos que $M = \varphi^{-1}(c)$ é uma hiperfície de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+k}$.*
3. *De modo análogo, define-se T_pM, para cada $p \in M$.*
4. *Temos ainda $\dim(T_pM) = n$ e β_x uma base para o espaço $[T_pM]^\perp$.*

Definition

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular de φ se

$$\varphi'(x) \text{ é sobrejetiva em cada ponto } x \in \varphi^{-1}(c).$$

Remark

1. *Note que isto é equivalente a pedir a independêcia linear do conjunto*
$$\beta_x = \{\nabla\varphi_1(x), \ldots, \nabla\varphi_k(x)\}, \ \forall x \in \varphi^{-1}(c).$$
2. *Neste caso, dizemos que $M = \varphi^{-1}(c)$ é uma hiperfície de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+k}$.*
3. *De modo análogo, define-se T_pM, para cada $p \in M$.*
4. *Temos ainda $\dim(T_pM) = n$ e β_x uma base para o espaço $[T_pM]^\perp$.*
5. *De modo análogo, define-se pontos críticos de uma restrição $f|_M$.*

Theorem (Multiplicadores de Lagrange)

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$, de classe C^1 e $M = \varphi^{-1}(c) \subset U$ uma hiperfície determinada pelo valor regular c de $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$. Nestas condições, $p \in M$ é ponto crítico de $f|_M$ se, e somente se, existem

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

tais que

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(p) + \ldots + \lambda_k \nabla \varphi_k(p).$$

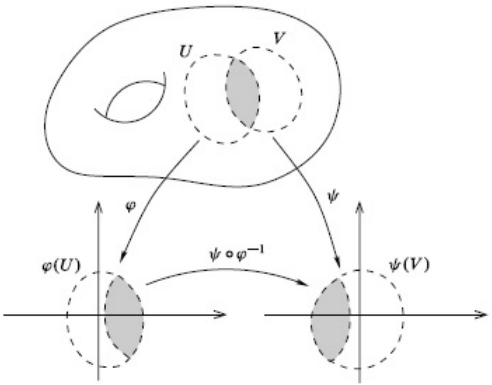
Remark

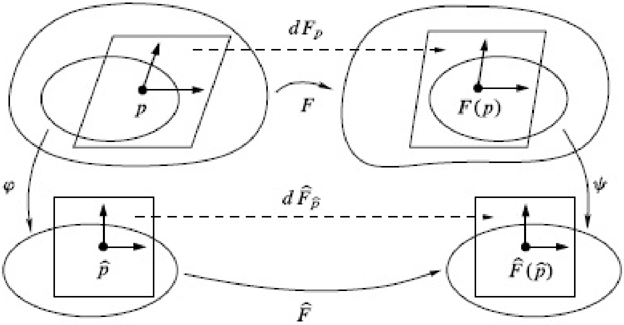
Segue desse resultado que p satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \varphi(p) = c \\ \nabla f(p) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \nabla \varphi_k(p) \end{cases}$$

Sobre variedades

Considere M um espaço topológico Hausdorff e 2-contável.





dF_p
F
p
$F(p)$
φ
ψ
$d\hat{F}_{\hat{p}}$
$\hat{p}$
$\hat{F}(\hat{p})$
$\hat{F}$