Aula de hoje

1. Hiperfícies;
2. Multiplicadore de Lagrange;
3. Multiplicadores de Lagrange;

Theorem (Função Implícita)

Sejam $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto, $p = (x_0, y_0) \in A$ um ponto e $f : A \to \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1 tal que $f(x_0, y_0) = c$ e é invertível a matriz

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right] \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(p) \end{bmatrix}$$

Nestas condições, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ tais que:

1. $p = (x_0, y_0) \in U \times V \subset A$;
2. *para cada $x \in U$, existe único $y = y(x) \in V$ satisfazendo*

   $$f(x, y(x)) = c,$$

   com y de classe C^1 em U.

Observações

- A equação $f(x, y(x)) = c$ pode ser escrita como o sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n)) = c_1 \\ \vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n)) = c_k \end{cases}$$

- Derivando cada linha com respeito a x_ℓ obtemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}(x, y) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \frac{\partial y_j}{\partial x_\ell}(x), \;\ell \in \{1, \ldots, n\}, \; j \in \{1, \ldots, k\}$$

Observações

- A equação $f(x, y(x)) = c$ pode ser escrita como o sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n)) = c_1 \\ \vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n)) = c_k \end{cases}$$

- Derivando cada linha com respeito a x_ℓ obtemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}(x, y) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y)\frac{\partial y_j}{\partial x_\ell}(x),\ \ell \in \{1, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, k\}$$

- Podemos ainda obter, para cada $i \in \{1, \ldots k\}$:

$$\begin{cases} \nabla f_i(x, y(x)) \cdot v_1 = 0 \\ \nabla f_i(x, y(x)) \cdot v_2 = 0 \\ \vdots \\ \nabla f_i(x, y(x)) \cdot v_n = 0 \end{cases} \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} v_1 = \left(1, 0, \ldots, 0, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(x), \ldots, \dfrac{\partial y_k}{\partial x_1}(x)\right) \\ v_2 = \left(0, 1, \ldots, 0, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}(x), \ldots, \dfrac{\partial y_k}{\partial x_2}(x)\right) \\ \vdots \\ v_n = \left(1, 0, \ldots, 0, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}(x), \ldots, \dfrac{\partial y_k}{\partial x_n}(x)\right) \end{cases}$$

Assim, o plano tangente ao conjunto

$$S = \{(x,y);\ f(x,y) = c\}$$

pode ser dado pelas equações

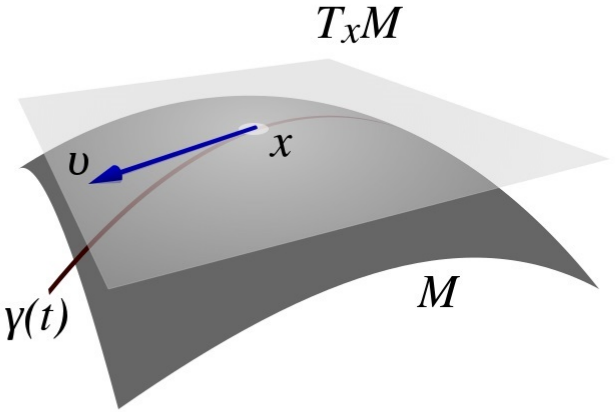
$$(x,y) = (x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,$$

ou ainda,

$$\begin{cases} [(x,y)-(x_0,y_0)] \cdot \nabla f_1(x_0,y_0) = 0 \\ \vdots \\ [(x,y)-(x_0,y_0)] \cdot \nabla f_k(x_0,y_0) = 0 \end{cases},$$

ou ainda

$$\{p_0 + \gamma'(0);\ \gamma(0) = p \ \text{ e } \ f(\gamma(t)) = c\}.$$


T_xM
x
v
$\gamma(t)$
M

Definition

Hiperfície Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é dito uma hiperfície (de dimensão n e classe C^1) se é, localmente, o gráfico de uma função de classe C^1

Isso quer dizer:

Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contendo p e uma função de classe C^1

$$\xi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

tais que

$$V \cap M = graf(\xi),$$

ou seja, para algum $i \in \{1, \ldots, n+1\}$

$$V \cap M = \{(x_1, \ldots, x_{n+1});\ x_i = \xi(\widehat{x_i})\},$$

Exexmplos

Example

O gráfico de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exexmplos

Example

O gráfico de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Example

A esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

- Considere $U = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ e, para cada $i \in \{1, \ldots, n1\}$, defina

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_i > 0\} \ \text{ e } \ W_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_i < 0\}$$

- Denote $x^* = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$
- Temos então

$$x \in \mathbb{S}^n \cap V_i \ \Leftrightarrow \|x\| < 1 \ \text{ e } \ x_i = \sqrt{1 - \|x^*\|}$$
$$x \in \mathbb{S}^n \cap W_i \ \Leftrightarrow \|x\| < 1 \ \text{ e } \ x_i = -\sqrt{1 - \|x^*\|}$$

O espaço T_pM

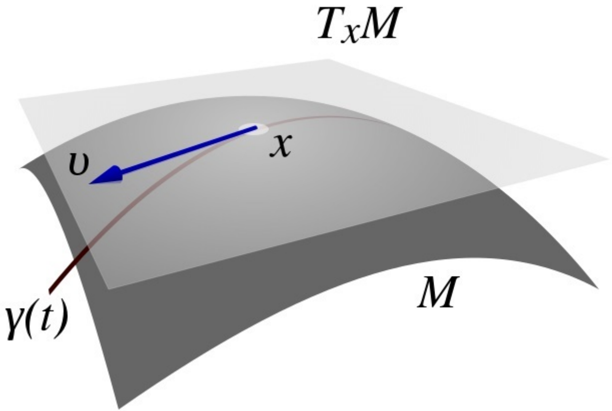
Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície e $p \in M$. O espaço tangente a M no ponto p é o conjunto

$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^{n+1};\ \text{existe}\ \ \gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to M,\ \gamma(0) = p\ \ \text{e}\ \ \gamma'(0) = v\}$$

O espaço T_pM

Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície e $p \in M$. O espaço tangente a M no ponto p é o conjunto

$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^{n+1};\ \text{existe}\ \ \gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to M,\ \gamma(0) = p\ \text{ e }\ \gamma'(0) = v\}$$



Theorem

O conjunto T_pM é um espaço vetorial de dimensão n.

Example

Temos que $T_p\mathbb{S}^n = [p]^\perp$.

Definition

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f se

$$\nabla f(x) \neq 0, \ \forall x \in f^{-1}(c).$$

Definition

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f se

$$\nabla f(x) \neq 0,\ \forall x \in f^{-1}(c).$$

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e c um valor regular. Nestas condições, temos que

$$M = f^{-1}(c) = \{x \in U;\ f(x) = c\}$$

é uma hiperfície. Mais ainda,

$$T_pM = [\nabla f(p)]^{\perp},\ \forall p \in f^{-1}(c).$$

Definition

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f se

$$\nabla f(x) \neq 0, \ \forall x \in f^{-1}(c).$$

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e c um valor regular. Nestas condições, temos que

$$M = f^{-1}(c) = \{x \in U;\, f(x) = c\}$$

é uma hiperfície. Mais ainda,

$$T_pM = [\nabla f(p)]^{\perp}, \ \forall p \in f^{-1}(c).$$

Remark

Existem hiperfícies que não são imagens inversas de valores regulares. Por exemplo, as não orientáveis.

Multiplicador de Lagrange

Objetivo

Procurar pontos críticos de restrições

$$f\,|_M\ : M \to \mathbb{R},\ M = \varphi^{-1}(c),$$

para c valor regular de $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Multiplicador de Lagrange

Objetivo

Procurar pontos críticos de restrições

$$f|_M : M \to \mathbb{R},\ M = \varphi^{-1}(c),$$

para c valor regular de $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Definition

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, de classe C^1 e $M = \varphi^{-1}(c) \subset U$ uma hiperfície determinada pelo valor regular c de φ. Dizemos que $p \in M$ é um ponto crítico de $f|_M$ se, para toda curva

$$\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to M, \text{ com } \gamma(0) = p,$$

tivermos

$$(f \circ \gamma)'(0) = 0.$$

Example

Considere as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) = y \ \text{ e } \ \varphi(x,y) = x^2 + y^2$$

Observe que f não possui ponto crítico algum. Mas, podemos obter para a restrição sobre a superfície

$$\mathbb{S}^1 = \varphi^{-1}(1).$$

Theorem (Multiplicador de Lagrange)

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, de classe C^1 e $M = \varphi^{-1}(c) \subset U$ uma hiperfície determinada pelo valor regular c de φ. Nestas condições, $p \in M$ é ponto crítico de $f\,|_M$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla \varphi(p).$$

Theorem (Multiplicador de Lagrange)

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, de classe C^1 e $M = \varphi^{-1}(c) \subset U$ uma hiperfície determinada pelo valor regular c de φ. Nestas condições, $p \in M$ é ponto crítico de $f|_M$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla \varphi(p).$$

Remark

Segue desse resultado que p satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \varphi(p) = c \\ \nabla f(p) = \lambda \nabla \varphi(p). \end{cases},$$

Example

Considere $a^2 + b^2 \neq 0$ e as funções

$$f(x,y) = ax + by \ \text{ e } \ \varphi(x,y) = x^2 + y^2$$

Example

Considere $a^2 + b^2 \neq 0$ e as funções

$$f(x,y) = ax + by \ \text{ e } \ \varphi(x,y) = x^2 + y^2$$

Example

Considere $A_{n\times n}$ simétrica e as funções

$$f(x) =< Ax, x > \ \text{ e } \ \varphi(x) =< x, x >$$