Aula de hoje

1. Polinômio de Taylor;
2. Matriz Hessiana;
3. Pontos críticos;
4. Formas quadráticas;
5. Funções convexas.

Teorema de Schwarz

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2. *Então, para cada* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *valem as igualdades*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x),$$

para todo $x \in U$.

Matriz Hessiana

Considere $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que existam as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(x),\ i,j \in \{i,\ldots,n\}.$$

Definimos a matriz Hessiana de f no ponto x por

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Matriz Hessiana

Considere $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que existam as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(x),\ i,j \in \{i,\ldots,n\}.$$

Definimos a matriz Hessiana de f no ponto x por

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Remark

Se f é de classe C^2, então $H_f(x)$ é simétrica.

Polinômio de Taylor

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2. *Fixado* $a \in U$ *considere* $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $a + v \in U$ *e defina*

$$r(v) = f(a+v) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot \alpha_i \alpha_j.$$

Nestas condições, temos que

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|^2} = 0.$$

Lemma

Sejam $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola aberta centrada na origem e $r : B \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Suponha que

$$r(0) = \frac{\partial r}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 0, \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Lemma

Sejam $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola aberta centrada na origem e $r : B \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Suponha que

$$r(0) = \frac{\partial r}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 0, \ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Nestas condições, temos que

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|^2} = 0.$$

Generalização

Considerando uma função de classe C^3 e as notações

$$df(a)\cdot v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot \alpha_i,$$

$$d^2f(a)\cdot v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\cdot \alpha_i\alpha_j,$$

$$d^3f(a)\cdot v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\cdot \alpha_i\alpha_j\alpha_k$$

podemos escrever

$$f(a+v)-f(a) = df(a)\cdot v + \frac{1}{2}d^2f(a)\cdot v^2 + \frac{1}{3!}d^3f(a)\cdot v^3 + r_3(v),$$

sendo

$$\lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{\|v\|^3} = 0.$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x).$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que
$$x \in U \cap B(a, \delta) \;\longrightarrow\; f(a) \leqslant f(x).$$

(b) Dizemos que a é um ponto de máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que
$$x \in U \cap B(a, \delta) \;\longrightarrow\; f(x) \leqslant f(a).$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x).$$

(b) Dizemos que a é um ponto de máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

(c) Se f é diferenciável, então dizemos que a é um ponto crítico de f se

$$\nabla f(a) = 0.$$

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in U$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in U$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Example

Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; g(x,y) = -x^2 - y^2 \text{ e } h(x,y) = x^2 - y^2$$

Forma quadrática

Fixada uma matriz simétrica $[h_{ij}]_{n\times n}$, chama-se forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é uma função $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cujo valor num vetor $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$H(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}\alpha_i\alpha_j,$$

Forma quadrática

Fixada uma matriz simétrica $[h_{ij}]_{n\times n}$, chama-se forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é uma função $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cujo valor num vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$H(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}\alpha_i\alpha_j,$$

Remark

Identificando $[h_{ij}]$ ao operador linear $[h_{ij}] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (base canônica) temos

$$H(v) = \langle [h_{ij}] \cdot v, v\rangle$$

(Notação: $H \cdot v^2 = \langle Hv, v\rangle$)

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = -x^2 - y^2 \text{ e } h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

$$\begin{aligned} H_f(0,0)\cdot v^2 &= 2(\alpha^2+\beta^2), \\ H_g(0,0)\cdot v^2 &= -2(\alpha^2+\beta^2), \\ H_h(0,0)\cdot v^2 &= 2(\alpha^2-\beta^2), \end{aligned}$$

sendo $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é:

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$;

(b) **positiva** se $H \cdot v^2 > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$;

(b) **positiva** se $H \cdot v^2 > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H \cdot v^2 \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$;

(b) **positiva** se $H \cdot v^2 > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H \cdot v^2 \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$;

(d) **é negativa** se $H \cdot v^2 < 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$;

(b) **positiva** se $H \cdot v^2 > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H \cdot v^2 \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$;

(d) **é negativa** se $H \cdot v^2 < 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

(e) **é indefinida** se existem $v, \omega \in \mathbb{R}^n$ tais que $H \cdot v^2 < 0$ e $H \cdot \omega^2 > 0$.

Classificação de pontos críticos

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

Classificação de pontos críticos

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

Classificação de pontos críticos

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de **mínimo** local;*

(b) $H_f(a)$ ***negativa*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de **máximo** local;*

Classificação de pontos críticos

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

(b) $H_f(a)$ ***negativa*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***máximo*** *local;*

(c) $H_f(a)$ ***indefinida*** $\Rightarrow$ *a* ***não*** *é ponto de máximo e* ***nem*** *mínimo local;*

Algumas observações

Algumas observações

Remark

Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e a é um ponto de mínimo local, então $H_f(a)$ é não-negativa.

Algumas observações

Remark

Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^2 *e* a *é um ponto de mínimo local, então* $H_f(a)$ *é não-negativa.*

Remark

Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^2 *e* a *é um ponto de máximo local, então* $H_f(a)$ *é não-positiva.*

Algumas observações

Remark

Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e a é um ponto de mínimo local, então $H_f(a)$ é não-negativa.

Remark

Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e a é um ponto de máximo local, então $H_f(a)$ é não-positiva.

Remark

Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e $H_f(a)$ é positiva (negativa), então f é injetiva numa bola centrada em a.

Funções convexas

Definition

(a) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se dados $a, b \in C$, temos que $[a, b] \subset C$;

Funções convexas

Definition

(a) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se dados $a, b \in C$, temos que $[a, b] \subset C$;

(b) Uma combinação convexa de k vetores $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma soma

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, \quad \text{com} \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Funções convexas

Definition

(a) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se dados $a, b \in C$, temos que $[a, b] \subset C$;

(b) Uma combinação convexa de k vetores $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma soma

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, \quad \text{com} \quad \alpha_i \geqslant 0 \;\text{ e }\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

(c) Uma função $f : C \to \mathbb{R}$ é dita convexa se

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y), \; \forall t \in [0, 1], \; x, y \in C.$$

Theorem

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto convexo e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Theorem

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função.

(a) *Se f é de classe C^1, então f é convexa se, e somente se, para $a, a + v \in C$ quaisquer valer*

$$f(a+v) - f(a) \geqslant \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Theorem

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função.

(a) *Se f é de classe C^1, então f é convexa se, e somente se, para $a, a+v \in C$ quaisquer valer*

$$f(a+v) - f(a) \geqslant \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

(b) *Se f é C^1, então todo ponto crítico é um mínimo global;*

Theorem

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função.

(a) *Se f é de classe C^1, então f é convexa se, e somente se, para $a, a+v \in C$ quaisquer valer*

$$f(a+v) - f(a) \geqslant \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

(b) *Se f é C^1, então todo ponto crítico é um mínimo global;*

(c) *Se f é de classe C^2, então f é convexa se, e somente se, $H_f(x)$ é não-negativa em C.*