Aula de hoje

1. Curvas;
2. Integral de um caminho;
3. Integrais múltiplas (funções definidas em retângulos);

Curvas

Uma curva em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

Curvas

Uma curva em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

- $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$;

Curvas

Uma curva em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

- $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$;
- Dado $t \in I$ defini-se (quando existe)

$$\begin{aligned} \gamma'(t_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - t_0}{h} \\ &= (\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_n'(t_0)) \end{aligned}$$

Curvas

Uma curva em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

- $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$;
- Dado $t \in I$ defini-se (quando existe)

$$\begin{aligned}\gamma'(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0+h) - t_0}{h} \\ &= (\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_n'(t_0))\end{aligned}$$

Dadas duas curvas $\gamma, \beta : I \to \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ diferenciáveis em t_0:

(a) $(\gamma + \beta)'(t_0) = \gamma'(t_0) + \beta'(t_0)$

(b) $(\lambda\gamma)'(t_0) = \lambda\gamma'(t_0)$

(c) $< \gamma, \beta >' (t_0) =< \gamma'(t_0), \beta(t_0) > + < \gamma(t_0), \beta'(t_0) >$

Desigualdade do valor médio

Theorem

Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *uma curva diferenciável em* (a, b) *tal que*

$$\|f'(t)\| \leqslant M, \ \forall t \in (a, b).$$

Nestas condições, existe $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\|.$$

Desigualdade do valor médio

Theorem

Suponha $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *uma curva diferenciável em* (a,b) *tal que*

$$\|f'(t)\| \leqslant M, \ \forall t \in (a,b).$$

Nestas condições, existe $c \in (a,b)$ *tal que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\|.$$

Corollary

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *é uma curva diferenciável com* $f'(t) \equiv 0$*, então* $f(t) \equiv c$.

Partição

Dado um intervalo $[a, b]$, uma partição é um conjunto

$$P = \{a = t_0 < \ldots < t_k = b\}.$$

A norma de uma partição é o número

$$|P| = \max_{i \in \{1,\ldots,k\}} (t_i - t_{i-1}).$$

Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e uma partição P de $[a, b]$, defini-se:

Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e uma partição P de $[a, b]$, defini-se:

- $$P^* = (P, \xi),\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k),\ t_{i-1} \leqslant \xi_i < t_i$$

- $$\sum(f, P^*) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e uma partição P de $[a, b]$, defini-se:

- $$P^* = (P, \xi),\ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k),\ t_{i-1} \leqslant \xi_i < t_i$$

- $$\sum(f, P^*) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

- $$\int_a^b f(t)dt \doteq \lim_{|P| \to 0} \sum(f, P^*)$$

Integrais Múltiplas

Considere $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo da forma

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

e uma função (limitada) $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Nosso objetivo é definir o número

$$\int_A f(x)dx.$$

Integrais Múltiplas

Considere $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo da forma

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

e uma função (limitada) $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Nosso objetivo é definir o número

$$\int_A f(x)dx.$$

Notação: O volume de um retângulo $\mathcal{R}$ é o número

$$vol(\mathcal{R}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Partições e subretângulos

- Uma partição P de um retângulo $\mathcal{R}$ é uma coleção de n partições P_ℓ dos itnervalos $[a_\ell, b_\ell]$. Usaremos a notação

$$P = (P_1, \ldots, P_n).$$

Partições e subretângulos

- Uma partição P de um retângulo $\mathcal{R}$ é uma coleção de n partições P_ℓ dos itnervalos $[a_\ell, b_\ell]$. Usaremos a notação

$$P = (P_1, \ldots, P_n).$$

- Se cada P_ℓ possui N_ℓ subintervalos, então P possui $\prod_{\ell=1}^{n} N_\ell$ subretângulos.

Partições e subretângulos

- Uma partição P de um retângulo $\mathcal{R}$ é uma coleção de n partições P_ℓ dos itnervalos $[a_\ell, b_\ell]$. Usaremos a notação

$$P = (P_1, \ldots, P_n).$$

- Se cada P_ℓ possui N_ℓ subintervalos, então P possui $\prod_{\ell=1}^{n} N_\ell$ subretângulos.
- Utilizaremos a notação $S \in P$ para dizer que S é um subsertângulo.

Partições e subretângulos

- Uma partição P de um retângulo $\mathcal{R}$ é uma coleção de n partições P_ℓ dos itnervalos $[a_\ell, b_\ell]$. Usaremos a notação

$$P = (P_1, \dots, P_n).$$

- Se cada P_ℓ possui N_ℓ subintervalos, então P possui $\prod_{\ell=1}^{n} N_\ell$ subretângulos.
- Utilizaremos a notação $S \in P$ para dizer que S é um subsertângulo.
- Dizemos que uma partição P' é um refinamento de de P se cada subretângulo de P' está contido num subretângulo de P.

Somas inferiores e superiores

Fixados uma partição P do retângulo $\mathcal{R}$ e um subretêngulo $S \in P$ definimos:

- $m_S(f) = \inf\{f(x),\ x \in S\}$

Somas inferiores e superiores

Fixados uma partição P do retângulo $\mathcal{R}$ e um subretêngulo $S \in P$ definimos:

- $m_S(f) = \inf\{f(x),\ x \in S\}$
- $M_S(f) = \sup\{f(x),\ x \in S\}$

Somas inferiores e superiores

Fixados uma partição P do retângulo $\mathcal{R}$ e um subretêngulo $S \in P$ definimos:

- $m_S(f) = \inf\{f(x),\ x \in S\}$
- $M_S(f) = \sup\{f(x),\ x \in S\}$
- $V(S) =$ volume de S.

Para uma partição P definimos

$$L(f,P) = \sum_{S \in P} m_S(f) \cdot V(S) \text{ e } U(f,P) = \sum_{S \in P} M_S(f) \cdot V(S)$$

Para uma partição P definimos

$$L(f,P) = \sum_{S \in P} m_S(f) \cdot V(S) \ \text{ e } \ U(f,P) = \sum_{S \in P} M_S(f) \cdot V(S)$$

- Evidentemente:

$$L(f,P) \leqslant U(f,P), \ \forall S \in P.$$

Lemma

Sejam $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P' um refinamento da partição P. Então, são validas as desigualdades

$$L(f,P) \leqslant L(f,P') \ \ e \ \ U(f,P') \leqslant U(f,P).$$

Lemma

Sejam $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P' um refinamento da partição P. Então, são validas as desigualdades

$$L(f, P) \leqslant L(f, P') \;\; e \;\; U(f, P') \leqslant U(f, P).$$

Corollary

Se P_1 e P_2 são duas partições, então

$$L(f, P_1) \leqslant U(f, P_2).$$

Lemma

Sejam $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e* P' *um refinamento da partição* P. *Então, são validas as desigualdades*

$$L(f,P) \leqslant L(f,P') \;\; e \;\; U(f,P') \leqslant U(f,P).$$

Corollary

Se P_1 *e* P_2 *são duas partições, então*

$$L(f,P_1) \leqslant U(f,P_2).$$

Corollary

$$\sup\{L(f,P)\} \leqslant \inf\{U(f,P)\}.$$

Funções integráveis sob retângulos

Definition

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é dita integrável se

$$\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}.$$

Neste caso, escrevemos

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx = \sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}.$$

Condição imediata de integrabilidade

Theorem

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *é integrável se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$*, existe uma partição* P *tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Exemplos

(a) Considere $f(x) \equiv c$.

Exemplos

(a) Considere $f(x) \equiv c$.

(b) Considere $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soma de funções integráveis

Theorem

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções integráveis sobre o retângulo* $\mathcal{R}$.

Soma de funções integráveis

Theorem

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções integráveis sobre o retângulo* $\mathcal{R}$.

(a) *Dados uma partição* P *e* $S \in P$ *um subretângulo:*

$$m_S(f) + m_S(g) \leqslant m_S(f+g) \ \ e \ \ M_S(f+g) \leqslant M_S(f) + M_S(g).$$

Soma de funções integráveis

Theorem

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções integráveis sobre o retângulo* $\mathcal{R}$.

(a) *Dados uma partição* P *e* $S \in P$ *um subretângulo:*

$$m_S(f) + m_S(g) \leqslant m_S(f+g) \;\; e \;\; M_S(f+g) \leqslant M_S(f) + M_S(g).$$

(b) *São válidas as desigualdades*

$$L(f,P) + L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \;\; e \;\; U(f+g,P) \leqslant U(f,P) + U(g,P).$$

Soma de funções integráveis

Theorem

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis sobre o retângulo $\mathcal{R}$.

(a) *Dados uma partição P e $S \in P$ um subretângulo:*

$$m_S(f) + m_S(g) \leqslant m_S(f+g) \ \text{ e } \ M_S(f+g) \leqslant M_S(f) + M_S(g).$$

(b) *São válidas as desigualdades*

$$L(f,P) + L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \ \text{ e } \ U(f+g,P) \leqslant U(f,P) + U(g,P).$$

(c) *A função $f+g$ é integrável e*

$$\int_{\mathcal{R}} (f+g)(x)dx = \int_{\mathcal{R}} f(x)dx + \int_{\mathcal{R}} g(x)dx.$$