Aula de hoje

Theorem (Teorema de Lebesgue)

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é integrável (no retângulo $\mathcal{R}$) se, e somente se, o conjunto de descontinuidades de f tem medida nula.

Funções integráveis sob retângulos

Dados um retângulo

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ e uma partição P de $\mathcal{R}$:

Funções integráveis sob retângulos

Dados um retângulo

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ e uma partição P de $\mathcal{R}$:

- $$m_S(f) = \inf\{f(x),\ x \in S\} \ \text{ e } \ M_S(f) = \sup\{f(x),\ x \in S\},$$

  sendo $S \in P$ um subretângulo.

Funções integráveis sob retângulos

Dados um retângulo

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ e uma partição P de $\mathcal{R}$:

- $$m_S(f) = \inf\{f(x),\ x \in S\} \text{ e } M_S(f) = \sup\{f(x),\ x \in S\},$$

  sendo $S \in P$ um subretângulo.

- $$L(f,P) = \sum_{S \in P} m_S(f) \cdot V(S) U(f,P) = \sum_{S \in P} M_S(f) \cdot V(S)$$

Funções integráveis sob retângulos

Dados um retângulo

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ e uma partição P de $\mathcal{R}$:

- $$m_S(f) = \inf\{f(x),\ x \in S\} \ \text{ e } \ M_S(f) = \sup\{f(x),\ x \in S\},$$
  sendo $S \in P$ um subretângulo.
- $$L(f,P) = \sum_{S \in P} m_S(f) \cdot V(S) U(f,P) = \sum_{S \in P} M_S(f) \cdot V(S)$$

Definition

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é dita integrável se

$$\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}.$$

Neste caso, escrevemos

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx = \sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}.$$

Condição imediata de integrabilidade

Theorem

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe uma partição P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Condição imediata de integrabilidade

Theorem

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *é integrável se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$*, existe uma partição* P *tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Remark

Escrevendo $M_S = M_S(f)$ *e* $m_S = m_S(f)$ *e*

$$\omega_S = M_S - m_S$$

obtemos: $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *é integrável se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$*, existe uma partição* P *tal que*

$$\sum_{S \in P} \omega_S \cdot vol(S) < \epsilon.$$

Exercícios

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis sobre o retângulo $\mathcal{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Exercícios

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis sobre o retângulo $\mathcal{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

(a) Dados uma partição P e $S \in P$ um subretângulo:

$$m_S(f) + m_S(g) \leqslant m_S(f+g) \text{ e } M_S(f+g) \leqslant M_S(f) + M_S(g).$$

Exercícios

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis sobre o retângulo $\mathcal{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

(a) Dados uma partição P e $S \in P$ um subretângulo:

$$m_S(f) + m_S(g) \leqslant m_S(f+g) \text{ e } M_S(f+g) \leqslant M_S(f) + M_S(g).$$

(b) São válidas as desigualdades

$$L(f,P) + L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \text{ e } U(f+g,P) \leqslant U(f,P) + U(g,P).$$

Exercícios

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis sobre o retângulo $\mathcal{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

(a) Dados uma partição P e $S \in P$ um subretângulo:

$$m_S(f) + m_S(g) \leqslant m_S(f+g) \ \text{ e } \ M_S(f+g) \leqslant M_S(f) + M_S(g).$$

(b) São válidas as desigualdades

$$L(f,P) + L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \ \text{ e } \ U(f+g,P) \leqslant U(f,P) + U(g,P).$$

(c) A função $cf + g$ é integrável e

$$\int_{\mathcal{R}} (cf+g)(x)dx = c\int_{\mathcal{R}} f(x)dx + \int_{\mathcal{R}} g(x)dx.$$

Exercícios

Sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis sobre o retângulo $\mathcal{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

(a) Dados uma partição P e $S \in P$ um subretângulo:

$$m_S(f) + m_S(g) \leqslant m_S(f+g) \ \text{ e } \ M_S(f+g) \leqslant M_S(f) + M_S(g).$$

(b) São válidas as desigualdades

$$L(f,P) + L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \ \text{ e } \ U(f+g,P) \leqslant U(f,P) + U(g,P).$$

(c) A função $cf + g$ é integrável e

$$\int_{\mathcal{R}} (cf+g)(x)dx = c\int_{\mathcal{R}} f(x)dx + \int_{\mathcal{R}} g(x)dx.$$

(d) A função $x \mapsto |f(x)|$ é integrável e

$$\left|\int_{\mathcal{R}} f(x)dx\right| = \int_{\mathcal{R}} |f(x)|\, dx.$$

Exemplos

(a) Considere $f(x) \equiv c$.

(b) Considere $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Medida nula

Medida nula

Definition

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ possui medida nula quando, para cada $\epsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável

$$X_1, X_2, \ldots,$$

de retângulos fechados tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} vol(X_i) < \epsilon.$$

- Medida nula segundo Lebesgue;
- Podemos trocar fechados por abertos na definição;
- Podemos trocar por cubos (abertos ou fechados);
- Se A possui medida nula e $B \subset A$, então B tem medida nula;

Theorem

Uma união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula.

Theorem

Uma união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula.

Proof.

Considere uma família $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de medida nula e defina

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe uma coleção $\{B_{i,k}\}_{i\in\mathbb{N}}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo:

- $med(B_{i,k}) = 0$ para cada $i, k \in \mathbb{N}$;
- $X_k \subset \bigcup B_{k,i}$, para cada $k \in \mathbb{N}$;
- $\sum_{i=1}^{\infty} vol(B_{k,i}) < \epsilon/2^k$, para cada $k \in \mathbb{N}$;

∎

Corollary

Todo conjunto enumerável tem medida nula.

Corollary

Todo conjunto enumerável tem medida nula.

Theorem

Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é Lipschitziana e* $med(X) = 0$, *então* $med(f(X)) = 0$.

Corollary

Todo conjunto enumerável tem medida nula.

Theorem

Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é Lipschitziana e $med(X) = 0$, então $med(f(X)) = 0$.

Proof.

Considere em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo e $c > 0$ satisfazendo

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Corollary

Todo conjunto enumerável tem medida nula.

Theorem

Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é Lipschitziana e $med(X) = 0$, então $med(f(X)) = 0$.

Proof.

Considere em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo e $c > 0$ satisfazendo

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Dado $\epsilon > 0$, considere uma coleção de cubos $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

- Cada aresta mede a_k;

Corollary

Todo conjunto enumerável tem medida nula.

Theorem

Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é Lipschitziana e $med(X) = 0$, então $med(f(X)) = 0$.

Proof.

Considere em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo e $c > 0$ satisfazendo

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Dado $\epsilon > 0$, considere uma coleção de cubos $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

- Cada aresta mede a_k;
- $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$;

Corollary

Todo conjunto enumerável tem medida nula.

Theorem

Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é Lipschitziana e* $med(X) = 0$*, então* $med(f(X)) = 0$.

Proof.

Considere em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo e $c > 0$ satisfazendo

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Dado $\epsilon > 0$, considere uma coleção de cubos $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

- Cada aresta mede a_k;
- $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} vol(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n < \epsilon / c^n$.

■

- Se $x, y \in X \cap C_k$, então $\|f(x) - f(y)\| \leqslant ca_k$;

- Se $x, y \in X \cap C_k$, então $\|f(x) - f(y)\| \leqslant ca_k$;
- Cada coordenada de $f(x) - f(y)$ pertence a um intervelo J_k de comprimento ca_k;

- Se $x, y \in X \cap C_k$, então $\|f(x) - f(y)\| \leqslant ca_k$;
- Cada coordenada de $f(x) - f(y)$ pertence a um intervelo J_k de comprimento ca_k;
- $$f(X \cap C_k) \subset \prod_{i=1}^{n} J_i = C'_k;$$

- Se $x, y \in X \cap C_k$, então $\|f(x) - f(y)\| \leqslant ca_k$;
- Cada coordenada de $f(x) - f(y)$ pertence a um intervelo J_k de comprimento ca_k;
- $$f(X \cap C_k) \subset \prod_{i=1}^{n} J_i = C'_k;$$
- $$vol(C'_k) = c^n a_k^n;$$

- Se $x, y \in X \cap C_k$, então $\|f(x) - f(y)\| \leqslant ca_k$;
- Cada coordenada de $f(x) - f(y)$ pertence a um intervelo J_k de comprimento ca_k;
- $$f(X \cap C_k) \subset \prod_{i=1}^{n} J_i = C'_k;$$
- $$vol(C'_k) = c^n a_k^n;$$
- $$f(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(X \cap C_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C'_k;$$

Aplicações

- Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, num aberto convexo, com derivada limitada

Aplicações

- Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, num aberto convexo, com derivada limitada

Theorem (Lindelof)

Toda cobertura aberta $X \subset \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda$ *possui subcobertura enumerável* $X \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{\lambda_j}$.

Aplicações

- Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, num aberto convexo, com derivada limitada

Theorem (Lindelof)

Toda cobertura aberta $X \subset \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda$ *possui subcobertura enumerável* $X \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{\lambda_j}$.

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *no aberto* U. *Se* $X \subset U$ *tem medida nula, então* $med(f(X)) = 0$.

Aplicações

- Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, num aberto convexo, com derivada limitada

Theorem (Lindelof)

Toda cobertura aberta $X \subset \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda$ possui subcobertura enumerável $X \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{\lambda_j}$.

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto U. Se $X \subset U$ tem medida nula, então $med(f(X)) = 0$.

Corollary

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto U. Se $m < n$, então $med(f(U)) = 0$.

Oscilação

Definition

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada, um ponto $a \in A$ e $\delta > 0$. Defini-se os valores

$$M(a,f,\delta) \doteq \sup\{f(x);\ x \in\ A \text{ e }\ \|x-a\| < \delta\}$$
$$m(a,f,\delta) \doteq \inf\{f(x);\ x \in\ A \text{ e }\ \|x-a\| < \delta\}.$$

A oscilação de f no ponto a é o número

$$o(f,a) \doteq \lim_{\delta\to 0}[M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)]$$

Oscilação

Definition

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada, um ponto $a \in A$ e $\delta > 0$. Defini-se os valores

$$M(a,f,\delta) \doteq \sup\{f(x);\ x \in\ A \text{ e }\ \|x-a\| < \delta\}$$
$$m(a,f,\delta) \doteq \inf\{f(x);\ x \in\ A \text{ e }\ \|x-a\| < \delta\}.$$

A oscilação de f no ponto a é o número

$$o(f,a) \doteq \lim_{\delta \to 0}[M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)]$$

Theorem

Tem-se que f é contínua em a se, e somente se, $o(f,a) = 0$

Theorem (Teorema de Lebesgue)

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é integrável (no retângulo* $\mathcal{R}$*) se, e somente se, o conjunto de descontinuidades de* f *tem medida nula.*

Theorem (Teorema de Lebesgue)

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é integrável (no retângulo $\mathcal{R}$) se, e somente se, o conjunto de descontinuidades de f tem medida nula.

Proof.

Denote por D_f o conjunto de descontinuidades de f. Mostremos que se $med(D_f) = 0$, então f é integrável.

- dado $\epsilon > 0$, considere $\{C'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de retângulos abertos tais que
  - $D_f \subset \bigcup C'_k$;

Theorem (Teorema de Lebesgue)

Uma função limitada $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é integrável (no retângulo $\mathcal{R}$) se, e somente se, o conjunto de descontinuidades de f tem medida nula.

Proof.

Denote por D_f o conjunto de descontinuidades de f. Mostremos que se $med(D_f) = 0$, então f é integrável.

- dado $\epsilon > 0$, considere $\{C'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de retângulos abertos tais que
  - $D_f \subset \bigcup C'_k$;
  - $\sum_{k=1}^{\infty} vol(C'_k) < \epsilon/K$, em que

$$K = M - N \doteq \sup_{x\in\mathcal{R}}\{f(x)\} - \inf_{x\in\mathcal{R}}\{f(x)\};$$

$\blacksquare$

- para cada $x \in \mathcal{R} \setminus D_f$, considere um bloco aberto C''_x, contento x de modo que
$$o(f,x) < \frac{\epsilon}{2vol(\mathcal{R})}, \text{ oscilação no fecho de } C''_x;$$

- para cada $x \in \mathcal{R} \setminus D_f$, considere um bloco aberto C''_x, contento x de modo que
$$o(f,x) < \frac{\epsilon}{2vol(\mathcal{R})}, \text{ oscilação no fecho de } C''_x;$$
- note que
$$\mathcal{R} \subset \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} C'_k \right\} \cup \left\{ \bigcup_{x \notin D_f} C''_x \right\};$$

- para cada $x \in \mathcal{R} \setminus D_f$, considere um bloco aberto C''_x, contento x de modo que

$$o(f,x) < \frac{\epsilon}{2vol(\mathcal{R})}, \quad \text{oscilação no fecho de } \; C''_x;$$

- note que

$$\mathcal{R} \subset \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} C'_k \right\} \cup \left\{ \bigcup_{x \notin D_f} C''_x \right\};$$

- temos então

$$\mathcal{R} \subset \left\{ \bigcup_{k=1}^{r} C'_k \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^{s} C''_j \right\};$$

- para cada $x \in \mathcal{R} \setminus D_f$, considere um bloco aberto C''_x, contento x de modo que
$$o(f,x) < \frac{\epsilon}{2vol(\mathcal{R})}, \quad \text{oscilação no fecho de } \; C''_x;$$
- note que
$$\mathcal{R} \subset \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} C'_k \right\} \cup \left\{ \bigcup_{x \notin D_f} C''_x \right\};$$
- temos então
$$\mathcal{R} \subset \left\{ \bigcup_{k=1}^{r} C'_k \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^{s} C''_j \right\};$$
- considere uma partição P de modo que seus subretângulos estejam contidos em C'_k ou em C''_j;

- sejam S' os subretângulos contidos em C'_k e S'' os subretângulos contidos em C''_j;

- sejam S' os subretângulos contidos em C'_k e S'' os subretângulos contidos em C''_j;
- temos

$$\omega_{S'} \leqslant K \text{ e } \omega_{S''} \leqslant \frac{\epsilon}{2vol(\mathcal{R})};$$

$$vol(S') \leqslant \frac{\epsilon}{2K} \text{ e } vol(S'') \leqslant vol(\mathcal{R});$$

- sejam S' os subretângulos contidos em C'_k e S'' os subretângulos contidos em C''_j;
- temos

$$\omega_{S'} \leqslant K \text{ e } \omega_{S''} \leqslant \frac{\epsilon}{2vol(\mathcal{R})};$$

$$vol(S') \leqslant \frac{\epsilon}{2K} \text{ e } vol(S'') \leqslant vol(\mathcal{R});$$

- assim

$$\sum_{S \in P} \omega_S vol(S) < \epsilon;$$

Para provar a recíproca, suponha que f é integrável.

Para provar a recíproca, suponha que f é integrável.

- para cada $k \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$D_k = \{x \in \mathcal{R};\ \omega(f,x) \geqslant 1/k\};$$

Para provar a recíproca, suponha que f é integrável.

- para cada $k \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$D_k = \{x \in \mathcal{R};\ \omega(f,x) \geqslant 1/k\};$$

- assim, obtemos

$$D_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k;$$

Para provar a recíproca, suponha que f é integrável.

- para cada $k \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$D_k = \{x \in \mathcal{R};\ \omega(f,x) \geqslant 1/k\};$$

- assim, obtemos

$$D_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k;$$

- dado $\epsilon > 0$, considere P uma partição tal que

$$\sum_{S \in P} \omega_S \cdot vol(S) < \epsilon/k;$$