Aula de hoje

Theorem (Mudança de variáveis)

Sejam $h : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Nestas condições, a composta $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e vale

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)|dx.$$

- Funções integráveis em retângulos:

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx = \sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\},$$

sendo $m_S(f) = \inf\{f(x),\ x \in S\}$ e $M_S(f) = \sup\{f(x),\ x \in S\}$.

- $A \subset \mathbb{R}^n$ possui medida nula quando, para cada $\epsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável $X \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ de retângulos fechados tais que $\sum_{i=1}^{\infty} vol(X_i) < \epsilon$.
- Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito J-mensurável se a função $\xi_X : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é integrável.
- O volume de X é o número $vol(X) = \int_{\mathcal{R}} \xi_X(x)dx$.
- Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto J-mesurável e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável se a função $\overline{f}$ é integrável em $\mathcal{R}$. Neste caso escrevemos

$$\int_X f(x)dx \doteq \int_{\mathcal{R}} \overline{f}(x)dx,$$

sendo $\overline{f}(x) = 0$, se $x \in \mathcal{R} - X$ e $\overline{f}(x) = f(x)$, se $x \in X$.

Theorem

Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável se, e somente se, $\partial(X)$ tem medida nula.

Theorem

Uma função limitada $f : X \to \mathbb{R}$ é integrável no conjunto J-mensurável X se, e somente se, seu conjunto descontinuidades D_f tem medida nula.

Theorem

Considere $f : A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ *integrável no produto dos retângulos* $A_1 \subset \mathbb{R}^m$ *e* $A_2 \subset \mathbb{R}^n$*. Para cada* $x \in A_1$*, cosnidere a função* $f_x : A_2 \to \mathbb{R}$*, com* $f_x(y) \doteq f(x,y)$*, e defina*

$$\varphi(x) = \underline{\int_{A_2}} f_x(y)dy \ \ e \ \ \psi(x) = \overline{\int_{A_2}} f_x(y)dy.$$

Nestas condições, as funções $\varphi, \psi : A_1 \to \mathbb{R}$ *são integráveis e vale*

$$\int_{A_1} \varphi(x)dx = \int_{A_1} \psi(x)dx = \int_{A_1 \times A_2} f(x,y)dxdy,$$

ou seja,

$$\int_{A_1 \times A_2} f(x,y)dxdy = \int_{A_1} \left[\underline{\int_{A_2}} f_x(y)dy \right] dx = \int_{A_1} \left[\overline{\int_{A_2}} f_x(y)dy \right] dx.$$

Somas de Riemann

Definition

Considere $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto J-mensurável. Uma decomposição de X é uma coleção de conjuntos J-mensuráveis $D = \{X_1, \ldots X_k\}$ tal que

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} X_j \text{ e } int(X_i \cap X_j) = \emptyset, \text{ se } j \neq i$$

- A norma de uma decomposição é o número

$$|D| \doteq \max\{diam(X_k),\, j = 1, l \ldots, k\}.$$

- Uma decomposição pontilhada é um par $(D, (\xi_i))$, em que $\xi_i \in X_i$.

- Dada uma decomposição D de um conjunto J-mensurável $X \subset \mathbb{R}^n$, e uma função limitada $f : X \to \mathbb{R}$ definimos os números:

$$m_i = m_i(f) = \inf_{x \in X_i} f(x) \text{ e } M_i = M_i(f) = \sup_{x \in X_i} f(x)$$

Soma inferior

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f) \cdot vol(X_i)$$

Soma superior

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{k} M_i(f) \cdot vol(X_i)$$

Definition (Soma de Riemann)

Dada uma decomposição pontilhada $(D, (\xi_i))$ e $f : X \to \mathbb{R}$ limitada, defini-se

$$\sum(f, D^*) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot vol(X_i).$$

Theorem

Sejam X um conjunto J-mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$ limitada.

1. *vale a igualdade*

$$\underline{\int_X} f(x)dx = \lim_{|D|\to 0} s(f, D) \;\; e \;\; \overline{\int_X} f(x)dx = \lim_{|D|\to 0} S(f, D)$$

2. *temos que f é integrável se, e somente se, existe o limite*

$$\lim_{|D|\to 0} \sum(f, D^*).$$

Neste caso, temos

$$\int_X f(x)dx = \lim_{|D|\to 0} \sum(f, D^*).$$

Theorem (Mudança de variáveis)

Sejam $h : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ *um difeomorfismo de classe* C^1, $X \subset U$ *um compacto J-mensurável e* $f : h(X) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável. Nestas condições, a composta* $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ *é integrável e vale*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)|dx.$$

Theorem (1)

Sejam $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \alpha x + \beta$, com $\alpha \neq 0$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto. Considere $J = T(I)$ e $f : J \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Nestas condições, temos

$$\overline{\int_J} f(y)dy = |\alpha| \overline{\int_I} f(\alpha x + \beta)dx$$

Theorem (1)

Sejam $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \alpha x + \beta$, com $\alpha \neq 0$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto. Considere $J = T(I)$ e $f : J \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Nestas condições, temos

$$\overline{\int_J} f(y)dy = |\alpha| \overline{\int_I} f(\alpha x + \beta)dx$$

Corollary

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e T como no teorema. Suponha $Y \subset [a, b]$ tal que f se anula fora de Y e fora de $T(Y)$. Então

$$\overline{\int_a^b} f(y)dy = \overline{\int_a^b} f(\alpha x + \beta)|\alpha|dx$$

Theorem

Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linear e invertível,* $X \subset \mathbb{R}^n$ *J-mensurávele* $f : T(X) \to \mathbb{R}$ *integrável. Nestas condições, vale*

$$\int_{T(X)} f(y)dy = \int_X f(T(x)) \cdot |\det T| dx.$$

Tipos de transformações lineares

Theorem

Toda transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se exprime como o produto de transformações lineares dos seguintes tipos:

T1 $T(x) = T(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi(x), x_2, \ldots, x_n)$, *sendo*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

T2 *para cada* $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, *vale*

$$T(x) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_1, \ldots, x_n)$$