Aula de hoje

Theorem (Mudança de variáveis)

Sejam $h : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Nestas condições, a composta $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e vale

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)| dx.$$

- Funções integráveis em retângulos:

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx = \sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\},$$

sendo $m_S(f) = \inf\{f(x),\ x \in S\}$ e $M_S(f) = \sup\{f(x),\ x \in S\}$.

- $A \subset \mathbb{R}^n$ possui medida nula quando, para cada $\epsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável $X \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ de retângulos fechados tais que $\sum_{i=1}^{\infty} vol(X_i) < \epsilon$.
- Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito J-mensurável se a função $\xi_X : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é integrável.
- O volume de X é o número $vol(X) = \int_{\mathcal{R}} \xi_X(x)dx$.
- Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto J-mesurável e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável se a função $\overline{f}$ é integrável em $\mathcal{R}$. Neste caso escrevemos

$$\int_X f(x)dx \doteq \int_{\mathcal{R}} \overline{f}(x)dx,$$

sendo $\overline{f}(x) = 0$, se $x \in \mathcal{R} - X$ e $\overline{f}(x) = f(x)$, se $x \in X$.

Theorem

Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável se, e somente se, $\partial(X)$ tem medida nula.

Theorem

Uma função limitada $f : X \to \mathbb{R}$ é integrável no conjunto J-mensurável X se, e somente se, seu conjunto descontinuidades D_f tem medida nula.

Theorem

Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear e invertível, $X \subset \mathbb{R}^n$ J-mensurável e $f : T(X) \to \mathbb{R}$ integrável. Nestas condições, vale

$$\int_{T(X)} f(y)dy = \int_X f(T(x)) \cdot |\det T| dx.$$

Theorem

Toda transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se exprime como o produto de transformações lineares dos seguintes tipos:

- T1 $T(x) = T(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x), x_2, \dots, x_n)$, *sendo*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

- T2 *para cada* $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$, *vale*

$$T(x) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_1, \dots, x_n)$$

Difeomorfismos admissíveis

Definition

Um difeomorfismo $h : U \to V$, de classe C^1, é dito admissível se o teorema da mudança de variáveis se aplica a h. O conjunto de tais difeomorfismos é denotado por $\mathcal{D}$.

Theorem (Exercício)

Seja $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1. Para cada $x \in U$, existe um aberto W_x satisfazendo:

1. $x \in W_x \subset U$;
2. *a restrição* $h|_{W_x} \to h(W_x)$ *pertence a* $\mathcal{D}$.

Número de Lebesgue

Definition

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura qualquer. Diz-se que $\delta > 0$ é um número de Lebesgue desta cobertura se $Y \subset X$ e $diam(Y) < \delta$, então $Y \subset C_\lambda$, para algum $\lambda \in L$.

Theorem

Toda cobertura aberta de um compacto possui número de Lebesgue.

Theorem

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos J-mensuráveis. Uma função $f : X \cup Y \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, as restrições $f|_X$ e $f|_Y$ são integráveis. Neste caso, vale

$$\int_{X\cup Y} f(x)dx = \int_X f(x)dx + \int_Y f(x)dx - \int_{X\cap Y} f(x)dx.$$

Além disso, se $int(X \cap Y) = \emptyset$, então

$$\int_{X\cup Y} f(x)dx = \int_X f(x)dx + \int_Y f(x)dx.$$

Theorem (Mudança de variáveis)

Sejam $h : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Nestas condições, a composta $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e vale

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)|dx.$$