Análise em $\mathbb{R}^n$

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Topologia em $\mathbb{R}^n$

1 Topologia em $\mathbb{R}^n$

Exercício 1 *Mostre que em $\mathbb{R}^n$ vale:*

1. $| < x, y > | \leqslant \|x\|\|y\|$;
2. $| < x, y > | = \|x\|\|y\|$ *se, e só se,* x *e* y *são l.d.;*
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(quando vale a igualdade?);*
4. $\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
5. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

Exercício 2 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $int(\partial A) = \emptyset$. Dê um exemplo $D \subset \mathbb{R}^n$ com ∂D aberto e não vazio.*

Exercício 3 *Vale que $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$? E quanto a $int(A \cup B)$?*

Exercício 4 *Avalie as afirmações:*

1. $A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B$;
2. $\partial A = \partial(\overline{A})$;
3. $\partial A = \partial(int(A))$;
4. $int(\partial A) = \emptyset$;
5. $\partial A \cap \partial B \subset \partial(A \cap B)$;

Exercício 5 *Sejam $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Se* $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_n$, *mostre que* $\overline{B_n} = \bigcup_{j=1}^n \overline{A_n}$;
2. *Se* $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *mostre que* $\overline{B} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ *(Qual inclusão nãio é verdadeira?).*

Exercício 6 *Mostre:*

1. $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto,* $S \subset K$ *infinito* $\Rightarrow S$ *tem ponto de acumulação em* K;
2. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, *com* K *compacto, então existe subsequência convergente em* K;
3. $S \subset \mathbb{R}^n$ *infinito não enumerável implica em existir ponto de acumulação.*

Exercício 7 *Mostre que: se F é fechado e $D \subset F$, então $\overline{D} \subset F$.*

Exercício 8 *Considere $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Mostre que se T é não identicamente nula, então $T(\mathbb{R}^m)$ não é limitado. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é limitado, então $T(X)$ é limitado.*

Exercício 9 *Mostre que a esfera não contém segmentos de retas.*

Exercício 10 *Seja $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Mostre que se $dim(\mathcal{N}) < \infty$, então toda sequência de Cauchy converge.*

Exercício 11 *Diz-se que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva norma se $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $< Tx, Ty >=< x, y >$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, então dizemos que T preserva produto interno.*

1. *Mostre que T preserva norma se, e somente se, preserva produto interno.*

2. *Mostre que uma transformação linear T com essa propriedade é necessariamente bijetiva.*

3. *Mostre que T^{-1} preserva norma.*

Exercício 12 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ não nulos. O ângulo entre x e y é denotado por $\angle(x, y)$ e definido como sendo*

$$\angle(x, y) \doteq arccos\left(\frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}\right).$$

Diz-se que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva ângulo se é bijetiva e $\angle(Tx, Ty) = \angle(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. *Mostre que se T preserva norma, então preserva ângulo.*

2. *Suponha que exista uma base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e números $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ tais que $Tx_i = \lambda_i x_i$. Nestas condições, T preserva ângulo se, e só se, os vcalores λ_i conincidem.*

3. *Caracterize todas as transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preservam ângulos.*

Exercício 13 *Obtenha o conjunto dos pontos interiores, pontos exteriores e pontos de fronteira dos seguintes conjuntos:*

1. $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leqslant 1\}$;

2. $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$;

3. $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \textit{cada coordenada } x_i \textit{ é racional}\}$.

Exercício 14

Exercício 15 *Considere $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a projeção sobre a i-ésima coordenada, isto é, $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\pi_i(A) \subset \mathbb{R}$ também é aberto.*

Exercício 16 *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos quaisquer. Mostre que:*

1. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

2. $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$;

3. $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$. *(Aqui $X \times Y \subset \mathbb{R}^{2n}$. O resultado é o mesmo se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$.)*

Exercício 17 *Dizemos que* $a \in \mathbb{R}^n$ *é valor de aderência de uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *se existe uma subsequência* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *convergindo para* a*. Mostre que o conjunto* X *de todos os valores de aderência de uma sequência é um conjunto fechado. Se a sequência é limitada, então* X *é compacto e não vazio.*

Exercício 18 *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *tal que, para todo compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$*, a interseção* $X \cap K$ *é compacta. Prove que* X *é fechado.*

Exercício 19 *O diâmetro de um conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$*, quando existe, é definido por*

$$diam(A) = sup_{x,y\in A}\|x - y\|.$$

Mostre que se $K \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto, então exitem* $a, b \in K$ *tais que* $diam(A) = \|a - b\|$.

Exercício 20 *O distância entre dois conjuntos* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *(sempre existe?), é definida por*

$$dist(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} \|x - y\|.$$

Mostre que se A *e* B *são limitados, disjuntos, não vazios e* $dist(A, B) = 0$*, então* $\partial(A) \cap \partial(B) \neq \emptyset$.

Exercício 21 *Mostre que* $\mathbb{R}^n$ *é separável, isto é, existe* $A \subset \mathbb{R}^n$ *denso e enumerável.*

Exercício 22 *Se* A *é aberto e* $A \cap \overline{X} \neq \emptyset$*, então* $A \cap X \neq \emptyset$.

Exercício 23 *Se* $E \subset \mathbb{R}^n$ *é um subespaço vetorial, então* E *é fechado. (Esse resultado vale em dimensão infinita, isto é, se* V *é um espaço normado e* E *é um subespaço de dimensão finita, então* E *é fechado.)*

Exercício 24 *Se o conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *é aberto e* $x \in A$*, então* $A - \{x\}$ *é também aberto.*

Exercício 25 *Mostre que as componentes conexas de um subconjunto aberto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *são também conjuntos abertos.*

Exercício 26 *Seja* $B \subset \mathbb{R}^n$ *uma bola (aberta ou fechada). Mostre que , para todo* $x \in B$*, o conjunto* $B - \{x\}$ *é conexo.*

Exercício 27 *Um conjunto conexo enumerável* $X \subset \mathbb{R}^n$ *tem no máximo um ponto.*