

Análise em \mathbb{R}^n

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2: Funções contínuas

Exercício 1 Estude a continuidade das funções abaixo.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \|x\|^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2(y-1)}{5x^2 + (y-1)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exercício 2 Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos, então $f(E)$ é conexo por caminhos.

Exercício 3 Mostre que $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\}$ é denso em $M_n(\mathbb{R})$.

Exercício 4 Mostre que se $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $E_2 \subset \mathbb{R}^m$ são conexos por caminhos, então $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é conexo por caminhos.

Exercício 5 Considere $\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial dos operadores lineares $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Mostre que a função $N : \operatorname{End}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$N(T) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$$

define uma norma em $\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$;

2. Considere $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações inversíveis. Prove que se $T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ são tais que

$$N(S - T)N(T^{-1}) < 1,$$

então $S \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$. Determine se $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ é aberto, fechado ou nenhum desses.

3. Mostre que a função $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$ dada por $A \mapsto A^{-1}$ é contínua;

Exercício 6 Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ defina a distância entre x e X pondo

$$\operatorname{dist}(x, X) = \inf\{\|x - y\|, y \in X\}$$

1. Mostre que $\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, X) = 0\}$;

2. Prove que a função $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto d(x, X)$ é uniformemente contínua. Em particular, um conjunto X é fechado se, e somente se, coincide com o conjunto de zeros de uma função contínua;

3. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ fechados e disjuntos. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\text{dist}(x, A)}{\text{dist}(x, A) + \text{dist}(x, B)}$$

é contínua, com $f(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$. Além disso, $A = f^{-1}(0)$ e $C = f^{-1}(1)$.

Exercício 7 Mostre que não existe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e injetora.

Exercício 8 Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, um ponto $a \in A$ e $\delta > 0$. Defina os valores

$$M(a, f, \delta) \doteq \sup\{f(x); x \in A \text{ e } \|x - a\| < \delta\}$$
$$m(a, f, \delta) \doteq \inf\{f(x); x \in A \text{ e } \|x - a\| < \delta\}.$$

1. Mostre que existe o número

$$o(f, a) \doteq \lim_{\delta \rightarrow 0} [M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)]$$

2. Mostre que f é contínua em a se, e somente se, $o(f, a) = 0$.

3. Se A é fechado e f limitada, então para cada $\epsilon > 0$, o conjunto

$$S = \{x \in A; o(f, a) \geq \epsilon\}$$

é fechado.

Exercício 9 O gráfico de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é o conjunto

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}; x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

Suponha que f é contínua.

1. Mostre que G_f é fechado;

2. Mostre que A e G_f são homeomorfos;

3. Considere $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n$ a esfera unitária e $p = (0, \dots, 1) \in \mathbb{S}^n$. Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p\}$ é homeomorfo a \mathbb{R}^n ;

Exercício 10 Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínuas em a . Se $f(a) \neq g(a)$, então existe uma bola centrada em a na qual $f(x) \neq f(y)$.

Exercício 11 O conjunto das matrizes ortogonais com determinante igual a 1 é conexo por caminhos. O conjunto das matrizes ortogonais possui exatamente duas componentes conexas.

Exercício 12 Toda função contínua num compacto é uniformemente contínua.