`Análise em` $\mathbb{R}^n$

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

`LISTA 3: Funções diferenciáveis`

Exercício 1 *Um caminho diferenciável em* $\mathbb{R}^n$ *é uma função diferenciável* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$*, sendo* I *um intrevalo.*

(a) *Mostre que se* $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *é outro caminho diferenciável, então*

$$\frac{d}{dt}\langle f, g\rangle(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0)\rangle + \langle f(t_0), g'(t_0)\rangle.$$

(b) *Se* $I = [a, b]$ *e* $\|f'(t)\| \leqslant M$*, então* $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a)$*.*

(c) *Defina* $\int_a^b f(t)dt$ *pondo*

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t), \ldots, \int_a^b f_n(t)\right).$$

Supondo f *de classe* C^1*, msotre que:*

(c1) $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$;

(c2) *Obtenha outra demonstração para o item (b).*

(c3) *Por qual motivo estamos supondo* f *de classe* C^1 *no item (c1)?:*

Exercício 2 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$*, para cada* $v \in \mathbb{R}^n$*, mas* f *não é diferenciável em* $(0, 0)$*.*

Exercício 3 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* 0*.*

(a) *Se* $f(tx) = tf(x)$*, para todo* $t > 0$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^n$*, então* f *é linear.*

(b) *Conclua que a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0, 0)$*.*

Exercício 4 *Considere* f *uma função complexa* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, com* A *um conjunto aberto.*

- *escrevendo* $\mathbb{C} \ni z = x + iy$*, podemos identificar* A *como um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$*;*

- *podemos escrever*
$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$
sendo $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- *a derivada de* f *num ponto* $z_0 = x_0 + iy_0$, *quando existe, é definida por*
$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

Mostre que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Exercício 5 *Suponha* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto* $f : A \to \mathbb{R}^m$ *diferenciável. Mostre que se* f *é Lipschitz, com constante* M, *então* $\|f'(x)\| \leqslant M$, *para todo* $x \in A$.

Exercício 6 *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $f : A \to \mathbb{R}^m$, $g : A \to \mathbb{R}^k$ *e* $L \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$. *Definindo*

$$\varphi(x) = \langle T(x) \cdot f(x), g(x) \rangle,$$

obtenha $\varphi'(x) \cdot h$, *para* $x \in A$ *e* $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 7 *Dizemos que* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *independe da segunda variável quando, para todo* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *tem-se* $f(x, y_1) = f(x, y_2)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f *independe da segunda variável se, e só se, existe* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x,y) = g(x)$.

(b) Qual a relação entre as derivadas de f *e* g*?*

Exercício 8 *Suponha que* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *satisfaça* $\|f(x)\| \leqslant \|x\|^2$. *Mostre que* f *é diferenciável na origem.*

Exercício 9 *Obtenha* f' *nos seguintes casos:*

(a) $f(x,y,z) = x^y$;

(b) $f(x,y,z) = (x^y, z)$;

(c) $f(x,y) = \int_a^{x+y} g(t)dt$, *sendo* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua.*

Exercício 10 *Estude a diferenciabilidade explicitando* $dF(p)$;

(a) $F(x) = (x, f(x))$, *sendo* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *diferenciável;*

(b) $F(x) = (x, f(y))$, *sendo* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *diferenciável e* $x \in \mathbb{R}^m$;

Exercício 11 *Considere* $\mathbb{M}_n$ *o conjunto das matrizes reais de ordem* n *e a função* $f : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ *dada por*

$$f(A) = A^3 + A^2.$$

Determine $Df_{A_0}(H)$, *com* $H \in \mathbb{M}_n$.

Exercício 12 *Considere* $A \in \mathbb{M}_3$ *como um elemento de* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, *supondo cada linha* $a_i \in \mathbb{R}^3$. *Mostre que a aplicação determinante* $det : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{R}$ *é diferenciável e obtenha* $(det)'_{A_0}(I)$.

Exercício 13 *Se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é tal qeu* $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|^2$, *então* f *é constante.*

Exercício 14 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciável. Mostre quu:*

(a) $F(x) = \langle f(x), f(x) \rangle$ *é diferenciável, explicitando* $F'_{x_0}(h)$.

(b) *se* $\|f(x)\| \equiv 1$, *então* $det(f'(x)) \equiv 0$.