Análise em $\mathbb{R}^n$

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4: Funções diferenciáveis II

Exercício 1 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ possui inversa $g(x) = x^{1/3}$ que não é derivável em $x = 0$. Existe alguma contradição com o teorema da função inversa?*

Exercício 2 *Estude a injetividade local de $f(x, y) = (x^3, y^3)$ no ponto $(0, 0)$.*

Exercício 3 *Estude a injetividade local de $f(x, y) = (x^2 + 2xy + y^2, x + y)$, em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Exercício 4 *Sejam $M_n(\mathbb{R})$ o espaço da matrizes reais $n \times n$ e $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $f(X) = X^2$. Mostre que se $Y \in M_n(\mathbb{R})$ está suficientemente próximo de I, então existe único X próximo de I tal que $X^2 = Y$ e $X = X(Y)$ é de classe C^∞.*

Exercício 5 *Repita o exemplo feito em sala (3 raízes distintas) para o polinômio*

$$p(x) = x^4 - a_0x^3 + b_0x^2 - c_0x + d_0$$

(agora você supoõe 4 raízes distintas.)

Exercício 6 *Suponha $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : A \to \mathbb{R}^n$ uma contração. Se $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota o operador identidade, mostre que $g = I + f$ é um homeomorfismo do aberto A sobre o aberto $g(A)$. (Este resultado é conhecido como Perturbação da identidade) .*

Exercício 7 *Considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Admita que*

$$f(x_0, y_0) = c \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

(a) *Verifique que o vetor gradiente de f, no ponto (x_0, y_0), é perpendicular ao gráfico de $y = y(x)$.*

(b) *Determine a reta tangente a curva $f(x, y) = c$ no ponto (x_0, y_0).*

Exercício 8 *Considere $f : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ satisfazendo as condições do teorema da função implícita no ponto (x_0, y_0), com $f(x_0, y_0) = c$. Determine a equeção do plano tangente ao conjunto*

$$S = \{(x, y);\ f(x, y) = c\},$$

no ponto (x_0, y_0).

Exercício 9 *Considere $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções, sendo g de classe C^∞ determinada por*

$$g(x) = \int_0^{f(x)} (1 + t^2)dt.$$

Mostre que f é de classe C^∞.

Exercício 10 *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função bijetiva de classe* C^1, *tal que* $\det(f'(x)) \neq 0$, *para todo* $x \in A$. *Mostre que* $f(A)$ *é aberto e que a inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ *é de classe* C^1.

Exercício 11 *Prove que se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é derivável e* $f'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *então* f *é bijetiva.*

Exercício 12 *Considere* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

Mostre que $\det(f'(x, y)) \neq 0$, *mas* f *não é injetiva em* $\mathbb{R}^2$ *(Note que é localmente!).*

Exercício 13 *Considere a equação*

$$x^3 + xy^2 + y^3 = 1.$$

É possível obter $x = x(y)$, *nas proximidades do ponto* $(1, 0)$. *E* $y = y(x)$*?*