Análise em $\mathbb{R}^n$

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5: Integração

Exercício 1 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo (ou J-mensurável). Mostre que se $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável. (Tente fazer pela definição.)*

Exercício 2 *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções integráveis sobre retângulo A.*

1. *Mostre que $cf + g$ é integrável e vale*

$$\int_A (cf + g)(x)dx = c\int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx,$$

   sendo $c \in \mathbb{R}$.

2. *Se $f(x) \geqslant 0$, para cada $X \in A$, então*

$$\int_A f(x)dx \geqslant 0.$$

   Em particular, se $f(x) \leqslant g(x)$, para cada $X \in A$, então

$$\int_A f(x)dx \leqslant \int_A g(x)dx.$$

3. *A função $x \mapsto |f(x)|$ é integrável e vale*

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leqslant \int_A |f(x)|dx.$$

   Em particular,

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leqslant M \cdot vol(A).$$

4. *Se f é contínua, então exite $c \in A$ tal que*

$$\int_A f(x)dx = f(c) \cdot vol(A).$$

Exercício 3 *Suponha que $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula e $f : X \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana. Mostre que $f(X)$ tem medida nula.*

Exercício 4 *Suponha $f : U \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 sobre o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que se $X \subset U$ tem medida nula, então $f(X)$ tem medida nula.*

Exercício 5 *Mostre que na definição de conjunto J-mensurável, digamos X, tem-se independência da escolha do retângulo que contém X. Em particular, $vol(X)$ está bem definido.*

Exercício 6 *Sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ *dois conjuntos limitados. Mostre que*

1. $\xi_{X \cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \xi_{X \cap Y}$;
2. $\xi_{X \cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y$.

Exercício 7 *Sejam* $A \subset B$ *retângulos em* $\mathbb{R}^n$. *Se* $f : B \to \mathbb{R}$ *é integrável, então a restrição* $f|_A$ *é integrável em* A.

Exercício 8 *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *integrável no retângulo* A. *Mostre que o gráfico de* f *é um subconjunto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de medida nula.*

Exercício 9 *Mostre que se* X *é J-mensurável e* $int(X) = \emptyset$, *então* $vol(X) = 0$.

Exercício 10 *Sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ *dois conjuntos J-mensuráveis. Mostre que uma função* $f : X \cup Y \to \mathbb{R}$ *é integrável se, e somente se, as restrições* $f|_X$ *e* $f|_Y$ *são integráveis. Neste caso, vale*

$$\int_{X \cup Y} f(x)dx = \int_X f(x)dx + \int_Y f(x)dx - \int_{X \cap Y} f(x)dx.$$

Além disso, se $int(X \cap Y) = \emptyset$, *então*

$$\int_{X \cup Y} f(x)dx = \int_X f(x)dx + \int_Y f(x)dx.$$

Exercício 11 *Repita o exercício* (2) *no caso em que* A *é um conjunto J-mensurável. (No item (4) é preciso supor* A *conexo.)*

Exercício 12 *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *integrável no conjunto J-mensurável* X. *Se* $Y \subset X$ *é J-mensurável e* X/Y *tem interior vazio, então*

$$\int_X f(x)dx = \int_Y f(x)dx.$$

Em particular, se $U = int(X)$, *então*

$$\int_X f(x)dx = \int_U f(x)dx.$$

Exercício 13 *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto J-mensurável. Se* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é linear e invertível, então*

$$vol(T(X)) = |\det(T)| \cdot vol(X).$$

Exercício 14 *Seja* $f : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *no aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Se* $f'(a)$ *é inversível, prove que*

$$\lim_{r \to 0} \frac{vol(f(B(a,r)))}{vol(B(a,r))} = |\det f'(a)|.$$

Exercício 15 *Demonstre o Tereoma de Sard:*

Teorema 1 *Seja* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação de calsse* C^1 *sobre o aberto* U *e*

$$A = \{x \in U;\ \det f'(x) = 0\}.$$

Nestas condições, $f(A)$ *tem medida nula. (O conjuto* A *é o conjuntos dos pontos nos quais* f' *não é um isomorfismo!)*

Exercício 16 *Sejam* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ *duas funções integráveis. Mostre que a função* $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ *é integrável em* $A = [a,b] \times [c,d]$ *e vale*

$$\int_A f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)\left(\int_c^d \psi(y)dy\right).$$