Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Normas, produto interno e linearidade em $\mathbb{R}^n$

Exercício 1 *Sejam* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ *e* $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, *com* $y = (y_1, \dots, y_n)$. *Mostre que:*

1. $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = (0, \dots, 0)$;
2. $| < x, y > | \leqslant \|x\|\|y\|$;
3. $| < x, y > | = \|x\|\|y\|$ *se, e só se,* $x = \alpha y$, *para algum* $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\langle \alpha x + y, w \rangle = \alpha \langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle$, *para quaisquer* $x, y, w \in \mathbb{R}^n$ *e todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;
5. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(quando vale a igualdade?)*;
6. $\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
7. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$
8. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$, *para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$;
9. $|x_j| \leq \|x\|$, *pra cada* $j \in \{1, \dots, n\}$;

Exercício 2 *Sejam* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|_\infty = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$.

1. *Mostre que* $\|x\|_\infty$ *satisfaz as propriedades 1, 5, 8 e 9 do exercício* (1).
2. *Faça um esboço do conjunto* $B_\infty(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\|_\infty \leq 1\}$.

Exercício 3 *Um par de vetores* $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$ *pertencentes ao* $\mathbb{R}^2$ *é dito linearmetne independente se a única solução da equação* $\alpha x + \beta y = 0$ *for* $\alpha = \beta = 0$.

1. *Mostre que* x, y *é um par linearmetne independente se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

2. *Reescreva esse resultado no caso de* 3 *vetores em* $\mathbb{R}^3$.
3. *Reescreva esse resultado no caso de* n *vetores em* $\mathbb{R}^n$.

Exercício 4 *Uma transformação linear entre os espaços* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ *é uma função* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *que satisfaz as seguintes condições:*

- $L(x + y) = L(x) + L(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

- *$L(\lambda x) = \lambda L(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Considere $A_{m\times n}$ uma matriz real. Mostre que a função $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T_A(x) = A\cdot x$ é uma transformação linear. (A notação $A \cdot x$ indica o produto usual de matrizes.)*

2. *Mostre que se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, então existe uma matriz $A_{m\times n}$ tal que $T_A(x) = A \cdot x$.*

3. *Suponha $n = m$. Mostre que a transformação linear $T_A(x) = A \cdot x$ é injetiva se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.*