Cálculo 2

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2: Topologia (Conjuntos abertos e fechados)

Exercício 1 *Utilizando argumentos geométricos argumente que se os conjuntos abaixo são, ou não, abertos.*

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$;
2. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1 \text{ e } |y| < 1\}$;
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy < 1\}$;
4. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x < 2 \text{ e } y > 0\}$;

Exercício 2 *Obtenha o conjunto dos pontos interiores, pontos exteriores e pontos de fronteira dos seguintes conjuntos:*

1. $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leqslant 1\}$;
2. $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$;
3. $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \text{cada coordenada } x_i \text{ é racional}\}$.

Exercício 3 *Avalie as afirmações:*

1. $A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B$;
2. $\partial A = \partial(\overline{A})$;
3. $\partial A = \partial(int(A))$;
4. $int(\partial A) = \emptyset$;
5. $\partial A \cap \partial B \subset \partial(A \cap B)$;

Exercício 4 *Sejam $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Se $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_n$, mostre que $\overline{B_n} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_n}$;*
2. *Se $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, mostre que $\overline{B} \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ (Qual inclusão não é verdadeira?).*

Exercício 5 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $int(\partial A) = \emptyset$. Dê um exemplo $D \subset \mathbb{R}^n$ com ∂D aberto e não vazio.*

Exercício 6 *Vale que $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$? E quanto a $int(A \cup B)$?*

Exercício 7 *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos quaisquer. Mostre que:*

1. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

2. $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$;

3. $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$. (Aqui $X \times Y \subset \mathbb{R}^{2n}$. O resultado é o mesmo se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$.)

Exercício 8 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $int(\partial A) = \emptyset$. Dê um exemplo $D \subset \mathbb{R}^n$ com ∂D aberto e não vazio.*

Exercício 9 *Vale que $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$? E quanto a $int(A \cup B)$?*

Exercício 10 *Mostre:*

1. $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $S \subset K$ infinito $\Rightarrow$ S tem ponto de acumulação em K;

2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, com K compacto, então existe subsequência convergente em K;

3. $S \subset \mathbb{R}^n$ infinito não enumerável implica em existir ponto de acumulação.

Exercício 11 *Mostre que: se F é fechado e $D \subset F$, então $\overline{D} \subset F$.*

Exercício 12 *O diâmetro de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, quando existe, é definido por*

$$diam(A) = sup_{x,y \in A} \|x - y\|.$$

Mostre que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então exitem $a, b \in K$ tais que $diam(A) = \|a - b\|$.

Exercício 13 *O distância entre dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (sempre existe?), é definida por*

$$dist(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

Mostre que se A e B são limitados, disjuntos, não vazios e $dist(A, B) = 0$, então $\partial(A) \cap \partial(B) \neq \emptyset$.

Exercício 14 *Se A é aberto e $A \cap \overline{X} \neq \emptyset$, então $A \cap X \neq \emptyset$.*