Cálculo 2
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3: Limties, continuidade e funções diferenciáveis

LIMITES

Exercício 1 *Verifique se existem os limites*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$$

CONTINUIDADE

Exercício 2 *Verifique em quais pontos as funções abaixo são contínuas*

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(d)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & caso\ contrário. \end{cases}$$

DERIVADAS PARCIAIS

Exercício 3 *Mostre que a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

admite derivadas parciais em $(0,0)$*, mas não é contínua neste ponto.*

Exercício 4 *Considere a função*

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Mostre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y)$$

Exercício 5 *Determine uma função* $f = f(x,y)$ *tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \dfrac{y}{y^2+1} \end{cases}$$

Exercício 6 *Suponha que uma função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *satisfaça as seguintes condições:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Mostre que* f *é constante.*

Exercício 7 *Considere a função*

$$f(x,y) = x^{x^{x^{x^y}}} + \ln(x)(arctg(arctg(arctg(sen(cos(xy)) - \ln(x+y))))).$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,y)$.

Exercício 8 *Considere a função*

$$F(x,y,z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right).$$

Mostre que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

DIFERENCIABILIDADE

Exercício 9 *Determine os pontos nos quais as funções do exercício* (2) *são diferenciáveis.*

Exercício 10 *Em quais pontos a função do exercício* (3) *é diferenciável?*

Exercício 11 *Obtenha a equação do plano tangente a função* $f(x,y) = 2x^2y$ *no ponto* $(1,1,2)$.

Exercício 12 *Considere* $f = f(x,y)$ *definida em todo o* $\mathbb{R}^2$, *diferenciável em* $(0,0)$ *e ainda*

$$f(tx,ty) = tf(x,y), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que existem $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $f(x,y) = ax + by$.

Exercício 13 *Considere*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(a) *Mostre que*

$$f(tx,ty) = tf(x,y),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) *Em virtude do exercício (12), podemos dizer se f é ou não diferenciável em $(0,0)$?*

Exercício 14 *A função $z = z(x,y)$ é dada implicitamente pela equação*

$$f\left(\frac{x}{y}, z\right) = 0,$$

sendo $f = f(u,v)$ diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \neq 0$. Mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

DESAFIOS

Exercício 15 *Um caminho diferenciável em $\mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, sendo I um intrevalo.*

(a) *Mostre que se $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é outro caminho diferenciável, então*

$$\frac{d}{dt}\langle f, g\rangle(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0)\rangle + \langle f(t_0), g'(t_0)\rangle.$$

(b) *Se $I = [a,b]$ e $\|f'(t)\| \leqslant M$, então $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b-a)$.*

(c) *Defina $\int_a^b f(t)dt$ pondo*

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t), \ldots, \int_a^b f_n(t)\right).$$

Supondo f de classe C^1, msotre que:

(c1) $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$;

(c2) *Obtenha outra demonstração para o item (b).*

(c3) *Por qual motivo estamos supondo f de classe C^1 no item (c1)?:*

Exercício 16 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para cada $v \in \mathbb{R}^n$, mas f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 17 *Considere f uma função complexa $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com A um conjunto aberto.*

- *escrevendo $\mathbb{C} \ni z = x + iy$, podemos identificar A como um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$;*

- *podemos escrever*
$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$
sendo $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- *a derivada de* f *num ponto* $z_0 = x_0 + iy_0$, *quando existe, é definida por*
$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

Mostre que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Exercício 18 *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $f : A \to \mathbb{R}^m$, $g : A \to \mathbb{R}^k$ *e* $L \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$. *Definindo*

$$\varphi(x) = \langle T(x) \cdot f(x), g(x) \rangle,$$

obtenha $\varphi'(x) \cdot h$, *para* $x \in A$ *e* $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 19 *Suponha que* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *satisfaça* $\|f(x)\| \leqslant \|x\|^2$. *Mostre que* f *é diferenciável na origem.*