

Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5: Polinômio de Taylor e pontos críticos

Exercício 1 Determine os polinômios de Taylor de ordem 1 das funções abaixo em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

(a) $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(c) $f(x, y) = \text{sen}(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exercício 2 Sejam $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $P(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 em volta do ponto $(0, 0)$.

(a) Mostre que se $x + 5y < 1$, então

$$|e^{x+5y} - P(x, y)| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2$$

(b) Avalie o erro que se comete na aproximação

$$e^{x+5y} \approx P(x, y),$$

com $x = 0,01$ e $y = 0,01$.

Exercício 3 Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de uma função $f(x, y)$ de classe C^2 numa bola B centrada em (x_0, y_0) . Prove que para todo $(x, y) \in B$, existe (\bar{x}, \bar{y}) interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e (x, y) tal que

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (y - y_0)^2 \right]$$

Exercício 4 Sejam $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$, sendo a, b, c, d, e constantes, e (x_0, y_0) um ponto crítico de f .

(a) Mostre que

$$f(x + x_0, y + y_0) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Supondo $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então

$$f(x + x_0, y + y_0) > f(x_0, y_0) \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

(c) Como é o gráfico de f ?

Exercício 5 Determine os polinômios de Taylor de ordem 2 das funções abaixo em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

(a) $f(x, y) = x \operatorname{sen}(y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Exercício 6 Sejam $P(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x, y) = x \operatorname{sen}(y)$ em volta do ponto $(0, 0)$. Mostre que

$$|f(x, y) - P(x, y)| < \frac{|y|^2}{2} \left[|x| + \frac{1}{3}|y| \right]$$

para todo (x, y) com $|x| < 1$.

Exercício 7 Obtenha os pontos críticos das funções abaixo:

(a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$.

(b) $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy = 5$.

(c) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$.