Prova 3

1. Polinômio de Taylor;
2. Pontos críticos;
3. Formas quadráticas;
4. Matriz Hessiana;
5. Classificação de pontos críticos
6. Funções convexas.
7. Multiplicador de Lagrange

Prova 3

1. Polinômio de Taylor;
2. Pontos críticos;
3. Formas quadráticas;
4. Matriz Hessiana;
5. Classificação de pontos críticos
6. Funções convexas.
7. Multiplicador de Lagrange

HOJE (28/05):

1. Polinômio de Taylor;
2. Pontos críticos;

Polinômio de Taylor de ordem 1

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *no aberto* U*. Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$*. Neste caso, têm-se que a função* $r(v)$ *defina por*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + r(h)$$

satisfaz $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0.$

Polinômio de Taylor de ordem 1

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 no aberto U. Fixado $a \in U$ considere $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a + h \in U$. Neste caso, têm-se que a função $r(v)$ defina por

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + r(h)$$

satisfaz $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0.$

Polinômio de Taylor de ordem 1

$$P(h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \quad (\text{para } h \text{ próximo de } 0)$$

Polinômio de Taylor de ordem 1

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

Polinômio de Taylor de ordem 1

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + r(x-x_0, y-y_0)$$

e também

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Polinômio de Taylor de ordem 1

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + r(x-x_0,y-y_0)$$

e também

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Importante:

Estas duas expressões valem, a priori, para (x, y) numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo

Considere $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$.

Exemplo

Considere $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$.

- Neste caso, temos

$$f\left(\frac{1}{2} + h_1, \frac{1}{2} + h_2\right) = h_1 + h_2 + r(h)$$

  com $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é então

$$P(h_1, h_2) = h_1 + h_2.$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^3 *no aberto* U*. Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$*. Neste caso, têm-se que a função* $r(h)$ *defina por*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j + r(h)$$

satisfaz $\lim_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|^2} = 0.$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^3 *no aberto* U*. Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$*. Neste caso, têm-se que a função* $r(h)$ *defina por*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j + r(h)$$

satisfaz $\lim_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|^2} = 0.$

Polinômio de Taylor de ordem 2

$$P(h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \ \text{(para } h \text{ próximo de } 0\text{)}$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

Polinômio de Taylor de ordem 2

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] + \\ &+ r(x-x_0, y-y_0) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} P(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] + \\ &+ r(x-x_0, y-y_0) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} P(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Importante:

Estas duas expressões valem, a priori, para (x, y) numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo

Considere $f(x,y) = xsen(y)$ e $a = (0,0)$.

Exemplo

Considere $f(x,y) = xsen(y)$ e $a = (0,0)$.

- Neste caso, temos
$$f(x,y) = -xy + r(x,y).$$
- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (0,0)$ é então
$$P(x,y) = -xy$$

Generalização

Considerando uma função de classe C^4 e as notações

$$df(a) \cdot v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i,$$

$$d^2 f(a) \cdot v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \alpha_i \alpha_j,$$

$$d^3 f(a) \cdot v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

Generalização

Considerando uma função de classe C^4 e as notações

$$df(a)\cdot v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot \alpha_i,$$

$$d^2f(a)\cdot v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\cdot \alpha_i\alpha_j,$$

$$d^3f(a)\cdot v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\cdot \alpha_i\alpha_j\alpha_k$$

podemos escrever

$$f(a+v)-f(a) = df(a)\cdot v + \frac{1}{2}d^2f(a)\cdot v^2 + \frac{1}{3!}d^3f(a)\cdot v^3 + r_3(v),$$

sendo

$$\lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{\|v\|^3} = 0.$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \;\longrightarrow\; f(a) \leqslant f(x).$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x).$$

(b) Dizemos que a é um ponto de máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que
$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x).$$

(b) Dizemos que a é um ponto de máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que
$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

(c) Se f é diferenciável, então a é dito um ponto crítico de f se
$$\nabla f(a) = 0.$$

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in U$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in U$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Example

Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = -x^2 - y^2 \text{ e } h(x,y) = x^2 - y^2$$