Prova 3

28/05

1. Polinômio de Taylor;
2. Pontos críticos;

04/06

1. Formas quadráticas;
2. Matriz Hessiana;
3. Classificação de pontos críticos

11/06 - HOJE

1. Máximos e mínimos sobre conjuntos compactos.
2. Multiplicador de Lagrange

Polinômio de Taylor de ordem 1

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *no aberto* U. *Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$. *Neste caso, têm-se que a função* $r(v)$ *defina por*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + r(h)$$

satisfaz $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0.$

Polinômio de Taylor de ordem 1

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *no aberto* U. *Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$. *Neste caso, têm-se que a função* $r(v)$ *defina por*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + r(h)$$

satisfaz $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0.$

Polinômio de Taylor de ordem 1

$$P(h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \ \ \text{(para } h \text{ próximo de 0)}$$

Polinômio de Taylor de ordem 1

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

Polinômio de Taylor de ordem 1

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + r(x-x_0, y-y_0)$$

e também

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Polinômio de Taylor de ordem 1

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + r(x-x_0, y-y_0)$$

e também

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Importante:

Estas duas expressões valem, a priori, para (x, y) numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo

Considere $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$.

Exemplo

Considere $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$.

- Neste caso, temos

$$f\left(\frac{1}{2} + h_1, \frac{1}{2} + h_2\right) = h_1 + h_2 + r(h)$$

  com $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é então

$$P(h_1, h_2) = h_1 + h_2.$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^3 *no aberto* U*. Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$*. Neste caso, têm-se que a função* $r(h)$ *defina por*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j + r(h)$$

satisfaz $\lim_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|^2} = 0.$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^3 *no aberto* U. *Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$. *Neste caso, têm-se que a função* $r(h)$ *defina por*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j + r(h)$$

satisfaz $\lim_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|^2} = 0.$

Polinômio de Taylor de ordem 2

$$P(h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \quad \text{(para } h \text{ próximo de } 0\text{)}$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

Polinômio de Taylor de ordem 2

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] + \\ &+ r(x-x_0, y-y_0) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} P(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e definindo $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] + \\ & + r(x-x_0, y-y_0) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} P(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Importante:

Estas duas expressões valem, a priori, para (x, y) numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo

Considere $f(x,y) = xsen(y)$ e $a = (0,0)$.

Exemplo

Considere $f(x,y) = xsen(y)$ e $a = (0,0)$.

- Neste caso, temos
$$f(x,y) = -xy + r(x,y).$$
- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (0,0)$ é então
$$P(x,y) = -xy$$

Generalização

Considerando uma função de classe C^4 e as notações

$$df(a) \cdot v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i,$$

$$d^2f(a) \cdot v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \alpha_i \alpha_j,$$

$$d^3f(a) \cdot v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

Generalização

Considerando uma função de classe C^4 e as notações

$$df(a)\cdot v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot \alpha_i,$$

$$d^2f(a)\cdot v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\cdot \alpha_i\alpha_j,$$

$$d^3f(a)\cdot v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\cdot \alpha_i\alpha_j\alpha_k$$

podemos escrever

$$f(a+v)-f(a) = df(a)\cdot v + \frac{1}{2}d^2f(a)\cdot v^2 + \frac{1}{3!}d^3f(a)\cdot v^3 + r_3(v),$$

sendo

$$\lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{\|v\|^3} = 0.$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x).$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que
$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x).$$

(b) Dizemos que a é um ponto de máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que
$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in U$.

(a) Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x).$$

(b) Dizemos que a é um ponto de máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

(c) Se f é diferenciável, então a é dito um ponto crítico de f se

$$\nabla f(a) = 0.$$

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in U$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in U$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Example

Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = -x^2 - y^2 \ \text{ e } \ h(x,y) = x^2 - y^2$$

Dica para o exercício 3 da lista 5

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *no aberto* U*. Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$*. Neste caso:*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + E(h, k),$$

sendo

$$E(h,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2\right],$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ *no interior do segmento de extremidades* (x_0, y_0) *e* $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Forma quadrática

Fixada uma matriz simétrica $[h_{ij}]_{2\times 2}$, chama-se forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ uma função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo valor num vetor $v = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ é dado por

$$H(v) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\, \alpha_i \alpha_j,$$

Forma quadrática

Fixada uma matriz simétrica $[h_{ij}]_{2\times 2}$, chama-se forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ uma função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo valor num vetor $v = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ é dado por

$$H(v) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\, \alpha_i \alpha_j,$$

Remark

Identificando $[h_{ij}]$ ao operador linear $[h_{ij}] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (base canônica) temos

$$H(v) = \langle [h_{ij}] \cdot v, v \rangle$$

(Notação: $H \cdot v^2 = \langle Hv, v \rangle$)

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(b) **positiva** se $H \cdot v^2 > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(b) **positiva** se $H \cdot v^2 > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H \cdot v^2 \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(b) **positiva** se $H \cdot v^2 > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H \cdot v^2 \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(d) **é negativa** se $H \cdot v^2 < 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H \cdot v^2 \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(b) **positiva** se $H \cdot v^2 > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H \cdot v^2 \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(d) **é negativa** se $H \cdot v^2 < 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(e) **é indefinida** se existem $v, \omega \in \mathbb{R}^2$ tais que $H \cdot v^2 < 0$ e $H \cdot \omega^2 > 0$.

Teorema de Schwarz

Theorem

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2*. Então, para cada* $i, j \in \{1, 2\}$ *valem as igualdades*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x),$$

para todo $x \in U$*.*

Matriz Hessiana

Considere $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existam as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),\ i,j \in \{1,2\}.$$

Matriz Hessiana

Considere $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existam as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),\ \ i,j \in \{1,2\}.$$

Definimos a matriz Hessiana de f no ponto (x,y) por

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Matriz Hessiana

Considere $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existam as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),\ i,j \in \{1,2\}.$$

Definimos a matriz Hessiana de f no ponto (x,y) por

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Remark

Se f é de classe C^2, então $H_f(x,y)$ é simétrica. Nesse caso, está bem definida a forma quadrática

$$H_f(x,y) \cdot v^2 = \langle H_f(x,y)v, v\rangle$$

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = -x^2 - y^2 \text{ e } h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

$$H_f(0,0)\cdot v^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$H_g(0,0)\cdot v^2 = -2(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$H_h(0,0)\cdot v^2 = 2(\alpha^2 - \beta^2),$$

sendo $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Classificação de pontos críticos - Parte 1

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

Classificação de pontos críticos - Parte 1

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

Classificação de pontos críticos - Parte 1

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de **mínimo** local;*

(b) $H_f(a)$ ***negativa*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de **máximo** local;*

Classificação de pontos críticos - Parte 1

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

(b) $H_f(a)$ ***negativa*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***máximo*** *local;*

(c) $H_f(a)$ ***indefinida*** $\Rightarrow$ *a* ***não*** *é ponto de máximo e* ***nem*** *mínimo local;*

Algumas observações

Remark

Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^2 *e* a *é um ponto de mínimo local, então* $H_f(a)$ *é não-negativa.*

Remark

Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^2 *e* a *é um ponto de máximo local, então* $H_f(a)$ *é não-positiva.*

Classificação de pontos críticos - Parte 2

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de c lasse C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y). A função

$$\mathcal{H}_f(x, y) = \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

Classificação de pontos críticos - Parte 2

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de c lasse C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y). A função

$$\mathcal{H}_f(x, y) = \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\mathcal{H}_f(a) > 0 \Rightarrow$ *a é um ponto de **mínimo** local;*

Classificação de pontos críticos - Parte 2

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de c lasse C^2 e $H_f(x,y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x,y). A função

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \det H_f(x,y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\mathcal{H}_f(a) > 0 \;\Rightarrow\;$ *a é um ponto de **mínimo** local;*

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ *e* $\mathcal{H}_f(a) > 0 \;\Rightarrow\;$ *a a é um ponto de **máximo** local;*

Classificação de pontos críticos - Parte 2

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de c lasse C^2 e $H_f(x,y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x,y). A função

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \det H_f(x,y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\mathcal{H}_f(a) > 0 \Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ *e* $\mathcal{H}_f(a) > 0 \Rightarrow$ *a a é um ponto de* ***máximo*** *local;*

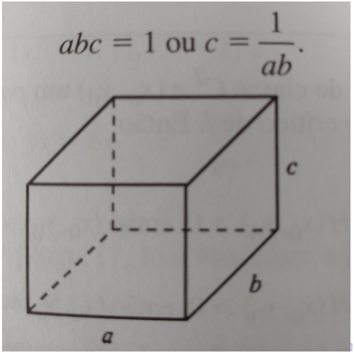
(c) $\mathcal{H}_f(a) < 0 \Rightarrow$ *a* ***não*** *é ponto de máximo e* ***nem*** *mínimo local;*

(d) *Se* $\mathcal{H}_f(a) = 0$, *então nada pode ser afirmado.*

Aplicação

Example

Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com $1\, m^3$ de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.



Máximos e mínimos sobre conjuntos compactos

Máximos e mínimos sobre conjuntos compactos

Definition (Conjunto limitado)

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se estiver contindo em alguma bola aberta centrada na origem.

Máximos e mínimos sobre conjuntos compactos

Definition (Conjunto limitado)

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se estiver contindo em alguma bola aberta centrada na origem.

Theorem

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, existe $M \geq 0$ tal que

$$\|x\| \leq M, \ \forall x \in A.$$

Máximos e mínimos sobre conjuntos compactos

Definition (Conjunto limitado)

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se estiver contindo em alguma bola aberta centrada na origem.

Theorem

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, existe $M \geq 0$ tal que

$$\|x\| \leq M, \ \forall x \in A.$$

Definition (Conjunto compacto)

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito compacto se é limitado e fechado.

Máximos e mínimos sobre conjuntos compactos

Definition (Conjunto limitado)

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se estiver contindo em alguma bola aberta centrada na origem.

Theorem

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, existe $M \geq 0$ tal que

$$\|x\| \leq M, \ \forall x \in A.$$

Definition (Conjunto compacto)

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito compacto se é limitado e fechado.

Theorem (de Weierstrass)

Suponha f uma função contínua no compacto $A \subset \mathbb{R}^n$. Nestas condições, existem $a, b \in A$ tais que

Exemplo

Vamos determinar os extremantes da função

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$$

no conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 2 \ \text{ e } \ |y| \leq 2\}$$

Exemplo

Vamos determinar os extremantes da função

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$$

no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 2 \ \text{ e } \ |y| \leq 2\}$$

Tática

1. Pontos críticos no interior de A;
2. Análise dos pontos de fronteira;

Exemplo

Vamos determinar os extremantes da função

$$f(x,y) = 2x + y$$

no conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq, \ y \geq 0, \ x + y \leq 4 \ \text{ e } \ 3x + y \leq 6\}$$

Exemplo

Vamos determinar os extremantes da função

$$f(x,y) = 2x + y$$

no conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq, \ y \geq 0, \ x + y \leq 4 \ \text{ e } \ 3x + y \leq 6\}$$

Tática

1. Pontos críticos no interior de A;
2. Análise dos pontos de fronteira;

Multiplicadores de Lagrange

Definition (Extremante local de uma restrição)

Multiplicadores de Lagrange

Definition (Extremante local de uma restrição)

Considere f uma função diferenciável num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e

$$B = \{(x,y) \in A;\ g(x,y) = 0\},$$

sendo g uma função de calsse C^1 que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\nabla g(x,y) \neq (0,0),\ \forall (x,y) \in B.$$

Multiplicadores de Lagrange

Definition (Extremante local de uma restrição)

Considere f uma função diferenciável num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e

$$B = \{(x, y) \in A;\ g(x, y) = 0\},$$

sendo g uma função de calsse C^1 que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\nabla g(x, y) \neq (0, 0),\ \forall (x, y) \in B.$$

Dizemos que $(x, y) \in B$ é um extremante local de $f\,|_B$ se existe λ tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Exemplos

Exemplos

1. Vamos determinar os extremantes de $f(x,y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplos

1. Vamos determinar os extremantes de $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.
2. Determinar a reta tangente à curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$ e $y > 0$, que forma com os eixos o triângulo de área mínima.

Exemplos

1. Vamos determinar os extremantes de $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.
2. Determinar a reta tangente à curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$ e $y > 0$, que forma com os eixos o triângulo de área mínima.
3. Considere uma forma quadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Obtenha os pontos extremantes da restrição de f ao conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Exemplos

1. Vamos determinar os extremantes de $f(x,y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.
2. Determinar a reta tangente à curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$ e $y > 0$, que forma com os eixos o triângulo de área mínima.
3. Considere uma forma quadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Obtenha os pontos extremantes da restrição de f ao conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Example

Considere $A_{2\times 2}$ simétrica e as funções

$$f(x) = < Ax, x > \quad \text{e} \quad \varphi(x) = < x, x >$$