

Exercício 1 (20 pontos) Dados $r > 0$ e $p \in \mathbb{R}^n$ mostre que a bola

$$B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - p\| < r\}$$

é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Exercício 2 (30 pontos) Uma partícula desloca-se no espaço com equações paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ de tal forma que

$$x'(t) = \sqrt{2}, \quad y'(t) = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad z''(t) = -2.$$

Sabe-se ainda que $z'(0) = 2$ e que $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$.

- Qual a posição da partícula num instante t ?
- Determine o instante T no qual a partícula volta a tocar o plano xy .
- Qual o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = T$?

Exercício 3 (20 pontos) Considere as funções

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Estude a continuidade das duas funções.
- Estude a diferenciabilidade das duas funções.

Exercício 4 (30 pontos) Determinado produto apresenta uma demanda y (em milhares) quando o preço, por unidade, é x (em reais). Foram observados os seguintes dados:

x	y
5	100
6	98
7	95
8	94

(A tabela diz que ao preço unitário de 5 reais a demanda foi de 100.000 unidades.)

- (15 pontos) Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados observados.
- (15 pontos) Utilizando a reta encontrada no item a), faça uma previsão para a demanda quando o preço, por unidade, for 10 reais.