

Exercício 1 (30 pontos) Mostre que se F é um conjunto fechado e $D \subset F$, então $\overline{D} \subset F$.

Dicas: Um ponto p pertence ao fecho de um conjunto X se, e somente se, existe uma sequência $\{x_n\}$ de pontos em X convergindo para p ; Um conjunto é fechado se, e somente se, é igual ao seu fecho;

Exercício 2 (20 pontos) Sejam u e v vetores quaisquer em \mathbb{R}^n . Mostre que

$$u \perp v \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Exercício 3 (20 pontos) Calcule:

(a) $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \frac{t - 1}{t} \right)$

(b) a reta tangente à trajetória da curva $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ no ponto $f(\pi/4)$.

Exercício 4 (20 pontos) Sejam a e b dois números reais, com $a > 0$ e $b < 0$. Considere a curva $\gamma(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t))$ definida em \mathbb{R} .

(a) Mostre que quando $t \rightarrow \infty$, tem-se $\gamma(t) \rightarrow 0$.

(b) Faça um esboço do traço de γ (Justifique);

(c) Mostre que $\gamma'(t) \rightarrow (0, 0)$, quando $t \rightarrow \infty$

(d) Mostre que o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$ é finito.

Exercício 5 (30 pontos) Uma partícula desloca-se no espaço com equações paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ de tal forma que

$$x'(t) = \sqrt{2}, \quad y'(t) = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad z''(t) = -2.$$

Sabe-se ainda que $z'(0) = 2$ e que $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$.

(a) Qual a posição da partícula num instante t ?

(b) Determine o instante T no qual a partícula volta a tocar o plano xy .

(c) Qual o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = T$?