

CMM 032 - Cálculo 2  
Professor:  
**Fernando de Ávila Silva**  
Departamento de Matemática - UFPR  
PROVA 1 - 11/04/2019

---

**Exercício 1** (30 pontos) Sejam  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos quaisquer.

1. Mostre que  $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ ;
2. Supondo  $X, Y$  fechados, mostre que  $X \cup Y$  é fechado;
3. Supondo  $X, Y$  abertos, mostre que  $X \cap Y$  é aberto;

**Exercício 2** (20 pontos) Sejam  $u$  e  $v$  vetores quaisquer em  $\mathbb{R}^{2019}$ . Mostre que

$$u \perp v \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

**Exercício 3** (20 pontos) Calcule:

(a)  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \frac{t - 1}{t} \right)$

(b) a reta tangente à trajetória da curva  $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$  no ponto  $f(\pi/3)$ .

**Exercício 4** (15 pontos) Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais, com  $a > 0$  e  $b < 0$ . Considere a curva  $\gamma(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t))$  definida em  $\mathbb{R}$ .

- (a) Mostre que quando  $t \rightarrow \infty$ , tem-se  $\gamma(t) \rightarrow 0$ .
- (b) Faça um esboço do traço de  $\gamma$ ;
- (c) Mostre que  $\gamma'(t) \rightarrow (0, 0)$ , quando  $t \rightarrow \infty$  e, além disso, o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$$

é finito.

**Exercício 5** (30 pontos) Considere  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva definida num intervalo  $I$  e derivável até segunda ordem. Suponha que  $r$  denota a posição de uma partícula  $P$  num dado instante  $t \in I$ . Considere as curvas  $v(t) = r'(t)$  e  $a(t) = v'(t)$ , definidas em  $I$ .

(a) Se  $\|v(t)\| = k$ , para todo  $t \in I$  e uma constante  $k > 0$ , prove que

$$\langle v(t), a(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in I.$$

(b) Como é possível calcular o deslocamento dessa partícula num intervalo  $[a, b] \subset I$ ?