CMM 032 - Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

PROVA 2 - 16/05/2019

Exercício 1 *(40 pontos) Considere as funções*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases} \quad e \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade das duas funções.

(b) Estude a diferenciabilidade das duas funções.

Exercício 2 *(20 pontos) Calcule os limites abaixo.*

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4} \quad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} xsen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Exercício 3 *(20 pontos) Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto (x_0, y_0). O* ***plano tangente*** *ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0.y_0))$ é o conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que*

$$z - f(x_0,y_0) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Por outro lado, a ***reta normal*** *ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0.y_0))$ é dada por*

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,f(x_0.y_0)) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Obtenha o plano tangente e a reta normal ao gráfico da função $f(x,y) = 3x^2y - x$ no ponto $(1, 2, f(1,2))$.

Exercício 4 *(10 pontos) Exiba uma função que possua derivadas parciais no ponto $(0,0)$, mas não é diferenciável neste ponto. (Você deve justificar.)*

Exercício 5 *(10 pontos) Considere a função*

$$f(x,y) = x^{x^{x^{x^y}}} + \ln(x)(arctg(arctg(arctg(sen(cos(xy)) - \ln(x+y))))).$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,y)$.