CMM 032 - Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

PROVA 3 - 18/06/2019

Exercício 1 *(60 pontos) Dados n pares de números $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n)$, com $n \geq 3$, em geral não existirá uma função real $f(x) = \alpha x + \beta$ cujo gráfico passe por todos esses n pontos. Entretanto, podemos determinar f de modo que a soma dos quadrados dos erros $f(a_i) - b_i$ seja mínima. Com base nessa informações, dados α e β reais, considere a soma*

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [f(a_i) - b_i]^2. \tag{1}$$

(a) (20 pontos) Verifique que pontos críticos da função $E(\alpha, \beta)$ são pontos de mínimo;

(b) (20 pontos) Determine α e β tais que a soma (1) seja mínima;

(c) (20 pontos) Determine a reta que melhor se ajusta aos pontos $(1, 3), (2, 7)$ e $(3, 8)$.

Exercício 2 *(20 pontos) Sejam $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$, sendo a, b, c, d, e constantes, e (x_0, y_0) um ponto crítico de f.*

(a) Mostre que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2, \ \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Supondo $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então

$$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0) \ \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Exercício 3 *(20 pontos) Considere a função $f(x, y) = 2x + y$ e o conjunto*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq, \ y \geq 0, \ x + y \leq 4 \quad e \quad 3x + y \leq 6\}$$

Justifique a seguinte afirmação:

Os extremantes de f são necessariamente pontos pertencentes à fronteira do conjunto A

Os teoremas abaixo podem ser utilizados livremente

Teorema 1 *Seja* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *no aberto* U. *Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$. *Neste caso:*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + E(h, k),$$

sendo

$$E(h, k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}, \overline{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}, \overline{y})k^2\right],$$

para algum $(\overline{x}, \overline{y})$ *no interior do segmento de extremidades* (x_0, y_0) *e* $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Teorema 2 *Sejam* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2, $a \in U$ *um ponto crítico,* $H_f(x, y)$ *a matriz Hessiana de* f *num ponto* (x, y) *e* $\mathcal{H}_f(x, y) = \det H_f(x, y)$.

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\mathcal{H}_f(a) > 0 \;\Rightarrow\;$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ *e* $\mathcal{H}_f(a) > 0 \;\Rightarrow\;$ *a a é um ponto de* ***máximo*** *local;*

(c) $\mathcal{H}_f(a) < 0 \;\Rightarrow\;$ *a* ***não*** *é ponto de máximo e* ***nem*** *mínimo local;*

(d) *Se* $\mathcal{H}_f(a) = 0$, *então nada pode ser afirmado.*