# Complementos de Matemática

## CM 024 - TN1- Administração

Professor:
**Fernando de Ávila Silva**
Departamento de Matemática - UFPR

## DICAS PARA A LISTA SOBRE DERIVADAS

---

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$. A derivada de $f$ no ponto $a$, caso exista, é o número

$$f'(a) \doteq \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

---

**Exercício 1** *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5x^2 + x - 1$. Para $h \neq 0$ calcule os seguintes valores:*

*(a)* $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$;

*Note que*

$$\begin{aligned} f(3+h) &= 5(3+h)^2 + (3+h) - 1 = 5(9 + 6h + h^2) + 3 + h - 1 \\ &= 45 + 30h + 5h^2 + 3 + h - 1 \\ &= 5h^2 + 31h + 47 \end{aligned}$$

*e* $f(3) = 5(3)^2 + (3) - 1 = 47$, *logo*

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{(5h^2 + 31h + 47) - 47}{h} = \frac{5h^2 + 31h}{h} \\ &= h\frac{(5h+31)}{h} \\ &= 5h + 31 \end{aligned}$$

**Exercício 2** *Repita o exercício anterior para a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3$.*
*Neste caso, teremos $f(3+h) = (3+h)^3 - 3 = \ldots$*

**Exercício 3** *Com respeito as funções $f$ e $g$ dos exercícios anteriores, calcule:*

*(a)* $f'(3)$.

*Temos*

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} (5h + 31) \\ &= 31 \end{aligned}$$

**Exercício 4** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções tais que $f'(a) = g'(a)$, então podemos concluir que $f(a) = g(a)$?*
*Veja o próximo exercício.*

**Exercício 5** *Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + x + 5$ e $g(x) = x^2 + x + 100$.*

*(a) Calcule $f'(3)$ e $g'(3)$;*

*(b) O que difere estas funções? Qual a relação entre as derivadas?*

**Exercício 6** *Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função cuja derivada é a função $f'(x) = x^2 - x + 2$.*

*(a) Otenha a função $f$;* *(b) Ela é única?*

*Pense no exercício anterior.*

**Exercício 7** *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + x$. Obtenha a reta tangente ao gráfico de $f$ nos pontos:*

*(a) $A = (0,0)$;*

*Se existe a derivada $f'(a)$ da função $f$ no ponto $a$, então a equação da reta tangete ao seu gráfico num ponto $(a,m)$ é $R(x) = f'(a)x + b$, sendo que a constante $b$ deve ser determinada. Para determina-la utilize o fato de que o ponto $(a,m)$ pertence ao gráfico de $f$, ou seja, $f(a) = m$.*

*Neste ítem temos $f'(0) = 1$, logo $R(x) = x + b$, Para determinar o valor de $b$, basta utilizar que o ponto $(0,0)$ pertence ao gráfico de $f$, ou seja, $f(0) = 0$, donde $0 + b = 0$ e portanto $b = 0$. Conlusão, $R(x) = x$.*

---

Lembre-se que:

(a) Num intervalo $A$ onde $f'(x)$ é positiva, temos que $f(x)$ é crescente;

(b) Num intervalo $B$ onde $f'(x)$ é netagiva, temos que $f(x)$ é decrescente;

(c) Se $f$ atinge seu mínimo num ponto $x_0$, então $f'(x_0) = 0$;

---

**Exercício 8** *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Utilizando o conceito de derivadas, obtenha:*

*(a) O intervalo no qual $f$ é crescente;*

*(b) O intervalo no qual $f$ é decrescente;*

*(c) O valor de $x$ no qual $f$ atinge seu mínimo;*

*Neste exercício temos $f'(x) = 2x + 2$. Para obter o ítem (a) e (b) obtenha os intervalos $A$ onde $f'(x)$ é positiva e $f'(x)$ é netagiva. Para está função (cujo gráfico é uma parábola) o ponto de mínimo é exatamente aquele em que $f'(x_0) = 0$, ou seja, $2x_0 + 2 = 0$, portanto $x_0 = -1$.*