CM 095 - Análise I
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1

1 Conjuntos

Exercício 1 *Prove que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.*

Exercício 2 *Sejam $A, B \subset E$. Prove que:*

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c,$$
$$A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B.$$

Exercício 3 *Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.*

Exercício 4 *Dê um exemplo de conjuntos A, B e C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.*

Exercício 5 *Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, então $X = A^c$.*

Exercício 6 *Prove as seguintes afirmações:*

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

(d) $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$;

Exercício 7 *Sejam L e M dois conjuntos de índices e duas famílias de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$, $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$,*

$$\{A_\lambda \cup B_\mu\}_{(\lambda,\mu) \in L \times M} \quad e \quad \{A_\lambda \cap B_\mu\}_{(\lambda,\mu) \in L \times M}.$$

(a) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são finitos;

(b) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são infinitos;

(c) Prove as seguintes igualdades

$$\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \bigcap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \bigcup \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

Exercício 8 *Seja $\{A_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N} \times N}$ uma família de conjuntos com índices em $\mathbb{N} \times N$. Exiba uma demonstração, ou um contra-exemplo, para a seguinte igualdade:*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right)$$

Exercício 9 *Para cada elemento $n \in \mathbb{N}$ defina $A_n = \{(n+1)k,\ \forall k \in \mathbb{N}\}$.*

(a) Determine $A_1 \times A_2$;

(b) Determine

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad e \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Exercício 10 *Dada uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$, considere os conjuntos*

$$\limsup A_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \quad e \quad \liminf A_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right).$$

(a) Prove que $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n;

(b) Prove que $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todo A_n, salvo para uma quantidade finita de de valores de n;

(c) Prove que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

(d) Se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n, então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \cup_{i=n}^{\infty} A_n.$$

(e) Se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n, então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \cap_{i=n}^{\infty} A_n.$$

(f) Exiba um exemplo em que $\liminf A_n \neq \limsup A_n$;

2 Funções

Exercício 11 *Dados conjuntos A e B, suponha que existam funções injetivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Prove que existe uma bijeção $h : A \to B$.*

Exercício 12 *Considere uma função $f : X \to Y$. Mostre que f é injetiva se, e somente se, existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g \circ f$ é a função identidade de X, ou seja, $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in X$.*

Exercício 13 *Considere uma função $f : X \to Y$. Mostre que f é sobrejetiva se, e somente se, existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g \circ f$ é a função identidade de Y, ou seja, $(f \circ g)(y) = y, \forall y \in Y$.*

Exercício 14 *Considere uma função $f : X \to Y$, conjuntos $A \subset X$ e $B \subset Y$.*

(a) Mostre que $f[f^{-1}[B]] \subset B$ e $f^{-1}[f[A]] \supset A$;;

(b) Mostre um exemplo onde não vale $f[f^{-1}[B]] = B$, ou $f^{-1}[f[A]] = A$;

(c) Mostre que se f é sobrejetiva, então $f[f^{-1}[B]] = B$.

Exercício 15 *Considere um conjunto A e uma coleção de subconjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in M}$, sendo M um conjunto de índices. Dada uma função $f : A \to B$, mostre que:*

(a) $f[\cup A_\lambda] = \cup f[A_\lambda]$;

(b) $f[\cap A_\lambda] \subset \cap f[A_\lambda]$;

(c) *Obtenha um exemplo em que* $f[\cap A_\lambda] \neq \cap f[A_\lambda]$;

Supondo $\{B_\mu\}_{\mu \in L}$ *uma coleção de subconjunto de* B*, para uma família de índices* L*. Mostre que:*

(d) $f^{-1}[\cup B_\mu] = \cup f[B_\mu]$;

(f) $f^{-1}[\cap B_\mu] = \cap f[B_\mu]$;

3 Indução

Exercício 16 *Demonstre os seguintes fatos:*

(a) $2(1+2+3+\ldots+n) = n(n+1)$;

(b) $1+2+3+\ldots+(2n+) = (n+1)^2$;

(c) $(a-1)(1+a+\ldots a^n) = a^{n+1}-1$, *dado* $a \in \mathbb{N}$;

(d) $n \geqslant 4 \Rightarrow n! > 2^n$;

(e) n^3+5n *é divisível por 6;*

(f) $n < 2^n$;

Exercício 17 *Dados os números naturais* a, b*, prove que existe um número natural* m *tal que* $ma > b$.

Exercício 18 *Um elemento* $a \in \mathbb{N}$ *chama-se antecessor de* $b \in \mathbb{N}$ *se* $a < b$ *e não existe* $c \in \mathbb{N}$ *tal que* $a < c < b$*. Prove que, exceto o 1, todo número natural possui um antecessor.*

Exercício 19 *Seja* X *um conjunto com* n *elementos. Prove que o conjunto das bijeções* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *possui* $n!$ *elementos.*

Exercício 20 *Dado um conjunto finito* X*, prove que uma função* $f : X \to X$ *é injetiva se, e somente se, é bijetiva.*

Exercício 21 *Sejam* X *e* Y *conjuntos finitos. Prove que*

$$card(X \cup Y) = card(X) + card(Y) - card(X \cap Y).$$

Exercício 22 *Prove que se* A *tem* n *elementos, então* $\mathcal{P}(A)$ *tem* 2^n *elementos.*

Exercício 23 *Considere a sequência* $\{x_n\}$ *definida da seguinte forma:* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ *e*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Use o Princípio da Indução Forte para mostrar que $1 \leqslant x_n \leqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercício 24 *Prove a fómula binomial: dados* $a, b \geqslant 0$ *e qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *temos*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n-k}, \quad sendo \ \binom{k}{n} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$