

Complementos de Matemática

CM 024 - TN1- Administração

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA: Funções e Derivadas

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Cálculo* de Deborah Hughes-Hallett.

Você pode pular os exercícios que abordam temas não discutidos em sala.

PROBLEMAS DE REVISÃO PARA O CAPÍTULO UM

- Um carro parte devagar e depois anda cada vez mais rápido até furar um pneu. Esboce um possível gráfico da distância percorrida pelo carro em função do tempo.
- Saí de casa apressado e, logo em seguida, me dei conta de que havia esquecido de desligar a máquina de lavar; então voltei para desligá-la e saí imediatamente. Esboce um gráfico da minha distância de casa em função do tempo.
- O gráfico da Fig. 1.91 mostra como varia o consumo de gás de cozinha, durante um período de 24 horas, em uma residência em Ancara, capital da Turquia. Dê uma possível explicação para a forma do gráfico.

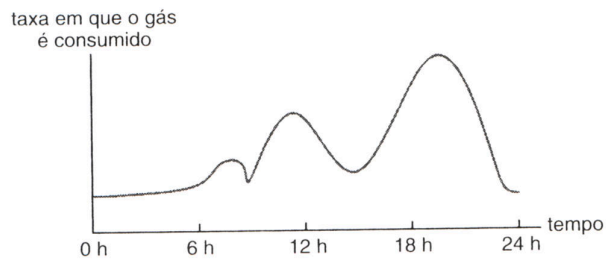


Fig. 1.91

- Esboce um possível gráfico para uma função que é sempre decrescente, côncava para cima para x negativo, e côncava para baixo para x positivo.
- Considere o gráfico da Fig. 1.92.

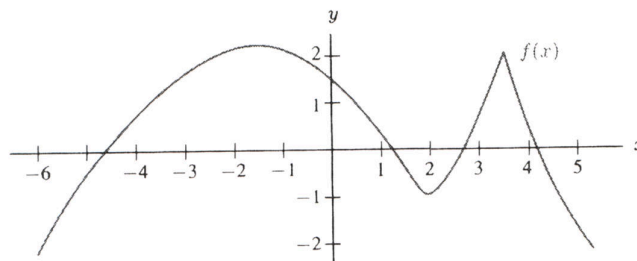


Fig. 1.92

- Quantos zeros tem a função? Dê suas localizações aproximadas.
 - Dê valores aproximados para $f(2)$ e $f(4)$.
 - A função é crescente ou decrescente na vizinhança de $x = -1$? E na vizinhança de $x = 3$?
 - O gráfico é côncavo para cima ou para baixo na vizinhança de $x = 2$? E na vizinhança de $x = -4$?
 - Dê os intervalos (aproximados) onde a função é crescente.
- A Tabela 1.26 fornece a temperatura média de Wallingford, em Connecticut (EUA), durante os primeiros 10 dias do mês de março de 1990.
 - Ao longo de quais intervalos a temperatura média estava crescendo? E decrescendo?

(b) Enc
cenc
a ter

TABELA 1

Datas em ma

Temperatura

7. Para fir
geladei
é a de c
guns ar
linear".
perde c
tempo.

8. Um avi
rente) p
mo tot
envolv

9. Esboce
gráficc

(a) O t
em
(b) A t

10. Se $f(x)$

(a) f

11. Para g

(a) g

12. Para f

(a) j

(b) j

(c) C

13. Esboce
várias

(a) $f(x)$

(b) $f(x)$

(c) $f(x)$

(d) $f(x)$

(e) $f(x)$

14. Quanc
em qt

(a) Es

de

(b) O

- (b) Encontre um par de intervalos consecutivos, ao longo dos quais a temperatura média estava crescendo a uma taxa decrescente. Encontre outro par de intervalos consecutivos ao longo dos quais a temperatura média estava crescendo a uma taxa crescente.

TABELA 1.26

Datas em março	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura média (°C)	6°	6°	1°	-4°	-6°	1°	3°	4°	9°	9°

7. Para fins de imposto de renda, você pode ter que declarar o valor dos seus bens, como carros ou geladeiras. O valor que você declara sofre uma depreciação ou queda, em função do tempo. A idéia é a de que um carro que você comprou por \$10.000,00 pode estar valendo somente \$5.000,00 alguns anos depois. O modo mais simples de se calcular o valor dos seus bens é usando “depreciação linear”, que assume o valor como sendo uma função linear do tempo. Se uma geladeira de \$950,00 perde completamente seu valor em sete anos, encontre uma fórmula para o seu valor em função do tempo.
8. Um avião gasta uma quantidade fixa de combustível para a decolagem, uma quantidade fixa (diferente) para o pouso e uma quantidade fixa por quilômetro quando está no ar. Como é que o consumo total de combustível depende do comprimento da viagem? Obtenha uma fórmula para a função envolvida. Explique o significado das constantes que aparecem na sua fórmula.
9. Esboce um gráfico razoável para as seguintes situações. Preste bastante atenção à concavidade dos gráficos e justifique sua argumentação.
- (a) O faturamento total, gerado por uma firma de aluguel de carros, em função da quantidade gasta em propaganda.
- (b) A temperatura de uma xícara de café quente, colocada em uma sala, em função do tempo.
10. Se $f(x) = x^2 + 1$, encontre:
- (a) $f(t + 1)$ (b) $f(t^2 + 1)$ (c) $f(2)$ (d) $2f(t)$ (e) $[f(t)]^2 + 1$
11. Para $g(x) = x^2 + 2x + 3$, determine:
- (a) $g(2 + h)$ (b) $g(2)$ (c) $g(2 + h) - g(2)$
12. Para $f(n) = 3n^2 - 2$ e $g(n) = n + 1$, determine:
- (a) $f(n) + g(n)$ (d) $f(g(n))$
 (b) $f(n)g(n)$ (e) $g(f(n))$
 (c) O domínio de $f(n)/g(n)$.
13. Esboce o gráfico de uma função definida para $x \geq 0$ com as seguintes propriedades. (Existem várias respostas possíveis.)
- (a) $f(0) = 2$.
 (b) $f(x)$ é crescente para $0 \leq x < 1$.
 (c) $f(x)$ é decrescente para $1 < x < 3$.
 (d) $f(x)$ é crescente para $x > 3$.
 (e) $f(x) \rightarrow 5$ quando $x \rightarrow \infty$.
14. Quando um novo produto é anunciado, cada vez mais pessoas o experimentam. No entanto, a taxa em que novas pessoas o experimentam diminui à medida que o tempo passa.
- (a) Esboce um gráfico do número total de pessoas que já experimentaram esse produto em função do tempo.
 (b) O que você pode dizer a respeito da concavidade do gráfico?

JM

Esboce um possível

desligar a máquina
a minha distância

em período de 24
horação para a forma

para cima para x

de $x = 3$?
variação de $x =$

durante os pri-

do?

84 CÁLCULO

Converta as funções dos Problemas 15-16 para a forma $P = P_0 a^t$.

15. $P = 2,91e^{0,55t}$ 16. $P = (5 \cdot 10^{-3})e^{-0,019t}$

17. (a) Use os dados da Tabela 1.27 para determinar uma fórmula do tipo

$$Q = Q_0 e^{rt}$$

que fornece o número de coelhos, Q , num dado instante t (em meses).

- (b) Qual é o período de duplicação aproximado para esta população de coelhos?
 (c) Use sua equação para prever quando é que a população atingirá 1.000 coelhos.

TABELA 1.27

t	0	1	2	3	4	5
Q	25	43	75	130	226	391

18. Caso você precise de \$20.000,00 daqui a seis anos, quanto você deve depositar agora? (Suponha uma taxa de juros anual de 10%, capitalizados continuamente.)
 19. Que taxa de juros nominal gera uma taxa efetiva anual de 5%?
 20. Qual é a taxa efetiva anual correspondente a uma taxa de juros nominal de 8%?
 21. Tipos variados de um mesmo elemento (chamados *isótopos*) podem ter meias-vidas bem diferentes. O decaimento de plutônio-240 é descrito pela fórmula

$$Q = Q_0 e^{-0,00011t}$$

enquanto o decaimento de plutônio-242 é descrito por

$$Q = Q_0 e^{-0,0000018t}$$

Encontre as meias-vidas do plutônio-240 e do plutônio-242.

22. A caixa craniana de um animal ainda possui 20% do carbono-14 que continha quando o animal morreu. A meia-vida do carbono-14 é de 5.730 anos. Encontre a idade aproximada dessa caixa craniana.
 23. Suponha que os preços aumentem a uma taxa de 0,1% ao dia.
 (a) Em que percentual os preços aumentam em um ano?
 (b) A partir da sua resposta para a parte (a), tente adivinhar o período de duplicação aproximado para esses preços. Verifique sua resposta.
 24. No início da década de 20, a Alemanha teve uma inflação tremendamente alta, chamada de hiperinflação. Fotografias da época registram pessoas indo ao mercado com carrinhos de mão cheios de dinheiro. Se uma bisnaga custava 1/4 DM em 1919 e 2.400.000 DM em 1922, qual foi a taxa de inflação anual média entre 1919 e 1922?
 25. Cada planeta se movimenta em torno do Sol em uma órbita elíptica. O período orbital, T , de um planeta é o tempo que ele leva para dar uma volta em torno do Sol. O semi-eixo maior da órbita de cada planeta é o valor médio entre a maior e a menor distância do planeta ao Sol. Kepler descobriu que o período de um planeta é proporcional à potência 3/2 do seu semi-eixo maior. Qual é o período (em dias) da órbita de Mercúrio, o planeta mais próximo ao Sol, que tem semi-eixo maior igual a 58 milhões de km? Qual é o período (em anos) de Plutão, o planeta mais distante, com semi-eixo maior de 6.000 milhões de km? O semi-eixo maior da Terra é de 150 milhões km. [Sugestão: qual é o período da Terra?]

26. Relacione

(a) $y =$

(b) $y =$

(c) $y =$

(I)

(IV)

(VII)

27. (a) Cons

(b) Cons

26. Relacione as seguintes fórmulas com os gráficos da Fig. 1.93:

- | | | |
|-----------------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $y = 1 - 2^{-x}$ | (d) $y = 1 - x^2$ | (g) $y = 2^{-x} \operatorname{sen} x$ |
| (b) $y = \log(x + 1)$ | (e) $y = \operatorname{tg} x$ | (h) $y = 1 + \cos x$ |
| (c) $y = 2 \cos x$ | (f) $y = x^3 - x^2 - x + 1$ | (i) $y = \operatorname{arctg} x$ |

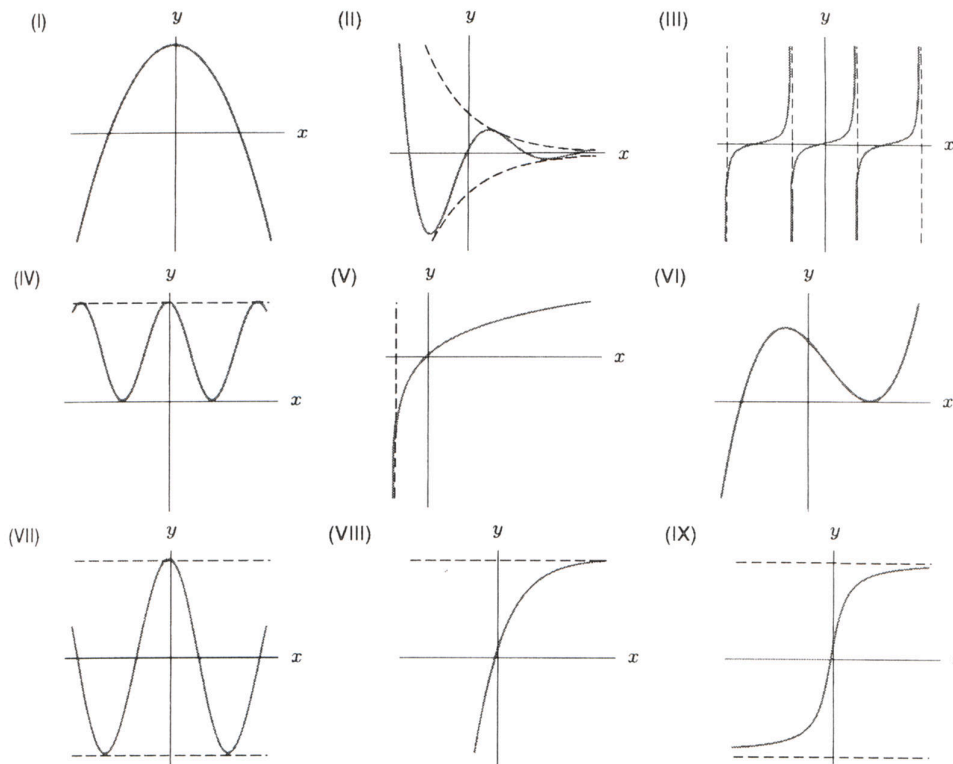


Fig. 1.93

27. (a) Considere as funções dadas na Fig. 1.94(a). Encontre as coordenadas de C .
 (b) Considere as funções dadas na Fig. 1.94(b). Encontre as coordenadas de C em função de b .

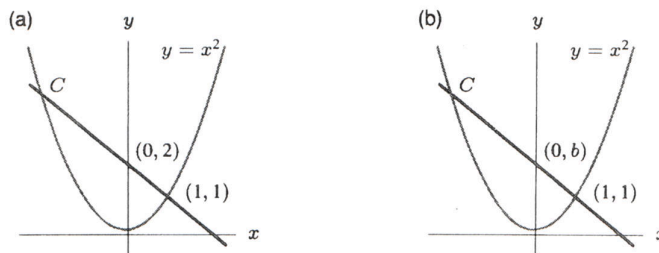


Fig. 1.94

gora? (Suponha

is bem diferen-

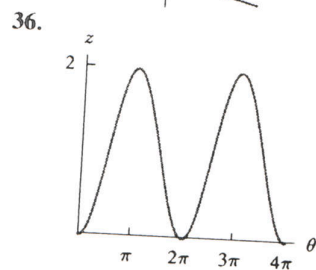
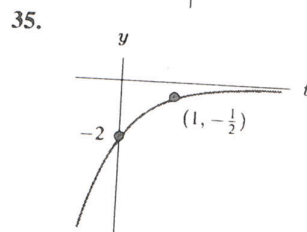
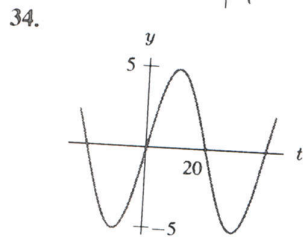
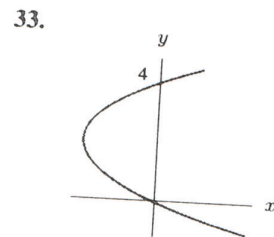
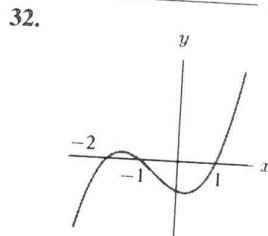
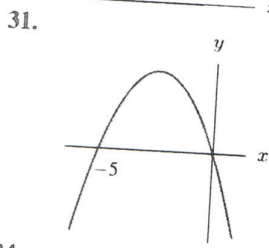
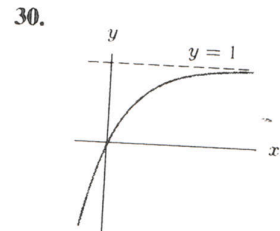
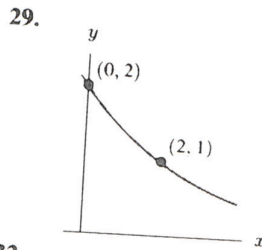
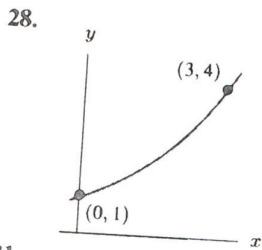
ndo o animal
essa caixa cra-

o aproximado

da de hiperin-
ção cheios de
foi a taxa de

tal, T , de um
da órbita de
ler descobriu
il é o período
ior igual a 58
di-eixo maior
ção: qual é o

Encontre fórmulas para os gráficos das funções dadas nos Problemas 28-36.



37. (a) O que a Tabela 1.28 lhe diz sobre as raízes de $\text{sen}(t^2) = 0$ no intervalo $0 \leq t \leq 4$? Quais suas localizações aproximadas?

TABELA 1.28

t	0	1	2	3	4
$\text{sen}(t^2)$	0	0,84	-0,76	0,41	-0,29

- (b) O que uma calculadora que plote gráficos, ou um computador lhe diz sobre o número de raízes que a equação tem no intervalo $0 \leq t \leq 4$?
- (c) Use uma calculadora ou um computador para estimar cada uma dessas raízes com precisão de uma casa decimal.
- (d) Explique por que a menor raiz positiva é $\sqrt{\pi}$?
- (e) Encontre uma expressão simbólica exata (como $\sqrt{\pi}$) para cada uma das outras raízes positivas que você encontrou.
38. (a) Defina $\text{arcsen } x$.
 (b) Encontre $\text{arcsen}(\text{sen } 1)$, $\text{arcsen}(\text{sen } 2)$, $\text{sen}(\text{arcsen } 1)$, $\text{sen}(\text{arcsen } 2)$.
 (c) Justifique suas respostas para a parte (b).
39. Usando uma calculadora ou um computador, esboce um gráfico de $y = \text{sen } x$, $y = 0,4$ e $y = -0,4$.
 (a) A partir do gráfico, faça uma estimativa, com precisão de uma casa decimal, para todas as soluções da equação $\text{sen } x = 0,4$ com $-\pi \leq x \leq \pi$.

- (b)
 (c)
 (d)
 40. A l
 tor
 xir
 hor
 41. (a)
 (b)
 (c)
 42. Ca
 ma
 fun

43. Dada
 (a) E
 (
 (
 (b) C
 d
 s

- (b) Use uma calculadora para encontrar $\arcsen(0,4)$. Qual é a relação entre $\arcsen(0,4)$ e cada uma das soluções que você encontrou para a parte (a).
- (c) Faça uma estimativa para todas as soluções de $\sen x = -0,4$ com $-\pi \leq x \leq \pi$ (novamente, com precisão de uma casa decimal).
- (d) Qual é a relação entre $\arcsen(0,4)$ e cada uma das soluções que você encontrou para a parte (c).

40. A profundidade de um tanque de água oscila, conforme uma senóide, uma vez a cada 6 horas, em torno de uma profundidade média de 7 metros. Se a profundidade mínima é de 5,5 metros e a máxima é de 8,5 metros, encontre uma fórmula para a profundidade em função do tempo, medido em horas. (Existem várias respostas possíveis.)
41. (a) Use uma calculadora que plote gráficos ou um computador, para determinar o período de $2 \sen 4x + 3 \cos 2x$.
 (b) Dê sua resposta em forma exata (como um múltiplo de π).
 (c) Determine os períodos de $\sen 4x$ e $\cos 2x$, e use esses valores para explicar sua resposta para a parte (a).
42. Cada uma das funções descritas pelos dados da Tabela 1.29 é crescente ao longo de seu domínio, mas cada uma cresce de forma diferente. Qual dos gráficos da Fig. 1.95 melhor se ajusta a cada função?

TABELA 1.29

x	$f(x)$	x	$g(x)$	x	$h(x)$
1	1	3,0	1	10	1
2	2	3,2	2	20	2
4	3	3,4	3	28	3
7	4	3,6	4	34	4
11	5	3,8	5	39	5
16	6	4,0	6	43	6
22	7	4,2	7	46,5	7
29	8	4,4	8	49	8
37	9	4,6	9	51	9
47	10	4,8	10	52	10



Fig. 1.95

43. Dado o gráfico de $y = h(x)$ na Fig. 1.96:

(a) Esboce um gráfico de:

(i) $y = h^{-1}(x)$

(ii) $y = \frac{1}{h(x)}$

- (b) O que acontece com a assíntota, quando você esboça o gráfico da função inversa?

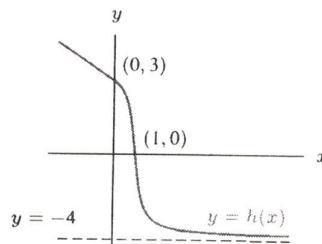


Fig. 1.96

$= 1$
 x

x



4? Quais suas

numero de raízes
 com precisão de

raízes positivas

4 e $y = -0,4$.
 todas as solu-

44. (a) Qual é o efeito da transformação

$$y = p(x) \quad \text{para} \quad y = p(1 + x)$$

sobre o gráfico de $p(x)$?

- (b) Se p é um polinômio de grau ≤ 2 tal que, para todo x

$$p(x) = p(1 + x)$$

o que você pode dizer a respeito da p ?

45. Para cada uma das duas condições seguintes, encontre todos os polinômios p de grau ≤ 2 que satisfazem a condição para todo x . (a) $p(x) = p(-x)$ (b) $p(2x) = 2p(x)$
46. Em uma reação química, um *catalisador* é uma substância que acelera a reação mas que, ele mesma, não sofre transformação. Se o produto de uma reação é um catalisador, a reação é chamada de *autocatalítica*. Suponha que a taxa, r , de uma dada reação autocatalítica é proporcional à quantidade da substância original que ainda permanece vezes a quantidade de produto, p , produzido. Se a quantidade inicial da substância original é A e a quantidade que ainda permanece é $A - p$:
- (a) Exprima r em função de p .
- (b) Qual é o valor de p quando a reação está ocorrendo de forma mais rápida?
47. Glicose é injetada via intravenosa em um paciente a uma taxa constante k . A glicose presente na corrente sanguínea é removida a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se R é a taxa global, na qual a quantidade G de glicose no sangue está aumentando:
- (a) Obtenha uma fórmula para R em função de G .
- (b) Esboce o gráfico de R versus G .
48. Uma população de peixes está se reproduzindo a uma taxa anual igual a 5% da população atual P . Enquanto isso, os peixes estão sendo pescados a uma taxa constante Y (medido em peixes por ano).
- (a) Obtenha uma fórmula para a taxa R , na qual a população está crescendo, em função de P .
- (b) Esboce o gráfico de R versus P .
49. Seja $S(x)$ o número de horas de luz solar, num dia 21 de junho, sem nuvens, em função da latitude x (medida em graus).
- (a) O que é $S(0)$? [Sugestão: a latitude 0° é o equador.]
- (b) Seja x_0 a latitude do Círculo Ártico ($x_0 \approx 66^\circ 30'$). No Hemisfério Norte, $S(x)$ é dado por:

$$S(x) = \begin{cases} a + b \arcsen\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x_0}\right) & \text{para } 0 \leq x \leq x_0 \\ 24 & \text{para } x_0 \leq x \leq 90 \end{cases}$$

para constantes dadas a e b . Determine a e b .

- (c) Calcule $S(x)$ para Tucson, no Arizona ($x = 32^\circ 13'$), e Walla Walla, em Washington ($x = 46^\circ 4'$).
- (d) Esboce o gráfico de $S(x)$ para $-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$, usando uma calculadora que plote gráficos ou um computador. O gráfico é suave?
50. A Fig. 1.97 contém o gráfico da função f , onde $f(t)$ é a profundidade, em metros, abaixo do fundo do Oceano Atlântico, onde rochas de t milhões de anos podem ser encontradas.⁷
- (a) Calcule $f(15)$ e diga o que significa em termos práticos.
- (b) A f é inversível? Justifique.
- (c) Calcule $f^{-1}(120)$ e diga o que significa em termos práticos.
- (d) Esboce um gráfico da f^{-1} .

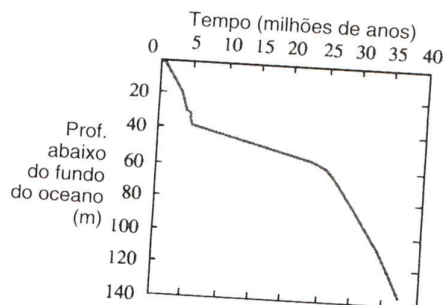


Fig. 1.97

⁷Dados do Dr. Murlene Clark, baseado em amostras extraídas com o navio de pesquisas *Glomar Challenger*, obtido de *Initial Reports of the Deep Sea Drilling Project*.

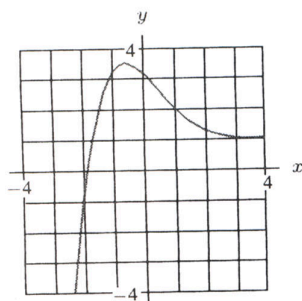
Come
podem
tempo
(escal
— não
variaçã
do nos
A d
va e, fi
represe
molécul

PROBLEMAS DE REVISÃO PARA O CAPÍTULO DOIS

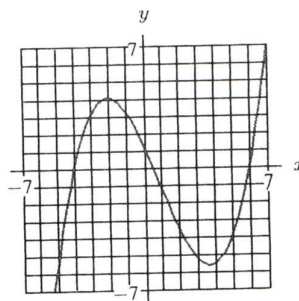
1. Usando uma calculadora ou um computador, esboce o gráfico de $f(x) = x \sin x$ no intervalo $-10 \leq x \leq 10$.
 - (a) Quantos zeros a $f(x)$ tem nesse intervalo?
 - (b) A f é crescente ou decrescente em $x = 1$? E em $x = 4$?
 - (c) Em qual intervalo a taxa de variação média é maior: $0 \leq x \leq 2$ ou $6 \leq x \leq 8$?
 - (d) A taxa de variação instantânea é maior em $x = -9$ ou em $x = 1$?
2. Para a função $f(x) = \log x$, faça uma estimativa para $f'(1)$. Com respeito ao gráfico da $f(x)$, você espera que sua estimativa seja maior ou menor do que $f'(1)$?
3. Seja $f(x) = x^2$. Na Seção 2.2, calculamos uma estimativa para $f'(1)$ fazendo uma tabela para os valores de x^2 em uma vizinhança de $x = 1$ (veja a Tabela 2.3). Faça o mesmo para $x = -1$ e para $x = 5$. Em cada caso, faça uma estimativa para a derivada naquele ponto. Relembrando, do Exemplo 4 da Seção 2.3, que $f'(2) \approx 4$ e $f'(3) \approx 6$, tente adivinhar uma fórmula geral para a derivada de $f(x) = x^2$.
4. Monte uma tabela de valores, como no Problema 3, com precisão de três casas decimais, para $f(x) = x^3$ em uma vizinhança de $x = 1$, $x = 3$ e $x = 5$. Em cada caso faça uma estimativa para as derivadas $f'(1)$, $f'(3)$ e $f'(5)$. E então, tente adivinhar uma fórmula geral para $f'(x)$.
5. Para $f(x) = \ln x$, monte tabelas, como no Problema 3, com precisão de quatro casas decimais, na vizinhança de $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$ e $x = 10$. Use as tabelas para fazer estimativas de $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(5)$ e $f'(10)$. E então, tente adivinhar uma fórmula geral para $f'(x)$.
6. (a) Se f é par e $f'(10) = 6$, qual deve ser o valor de $f'(-10)$?
 (b) Se f é qualquer função par e $f'(0)$ existe, qual deve ser o valor de $f'(0)$?
7. Se g é uma função ímpar e $g'(4) = 5$, qual deve ser o valor de $g'(-4)$?

Para os Problemas 8-9, esboce um gráfico da função derivada para as funções dadas.

8.

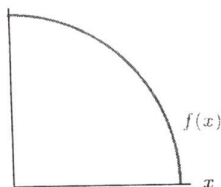


9.

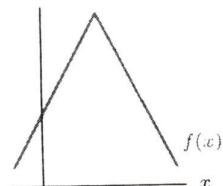


Esboce os gráficos das derivadas para as funções dadas nos Problemas 10-14. Certifique-se de que seus esboços estão coerentes com as características importantes das funções originais.

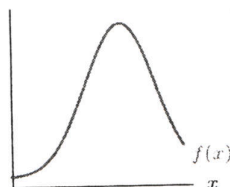
10.



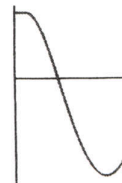
11.



12.



13.



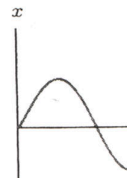
15. Esboce um p
- Para $x < -$
 - Para $-2 <$
 - Em $x = 1,$
 - Para $x > 1$

16. Pediu-se a três são apresent

- O aluno A
 - O aluno B
 - O aluno C
- resultados
- (a) Esboce c
 - (b) Explique
 - (c) Use o m
- incremer

17. Cada um dos do eixo x coi
- Durante este
- (a) Velocida
 - (b) A maior
 - (c) A maior

(l)



18. Sejam $g(x)$
- (a) Encontr
 - (b) Encontr
 - (c) Se o grá
 - (d) Onde é c

IS

intervalo $-10 \leq$

ico da $f(x)$, você

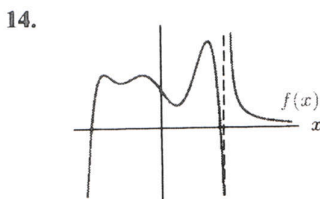
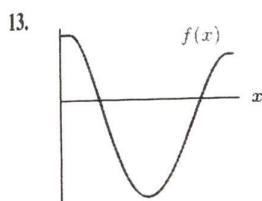
la para os valores
para $x = 5$. Em
mplo 4 da Seção
 $f(x) = x^2$.

ocimais, para $f(x)$
tiva para as deri-

as decimais, na
s de $f'(1), f'(2)$,

ue-se de que seus

$f(x)$
 x



15. Esboce um possível gráfico de $y = f(x)$ das seguintes informações sobre sua derivada:

- Para $x < -2, f'(x) > 0$ e a derivada é crescente.
- Para $-2 < x < 1, f'(x) > 0$ e a derivada é decrescente.
- Em $x = 1, f'(x) = 0$.
- Para $x > 1, f'(x) < 0$ e a derivada é decrescente (ficando cada vez mais negativa).

16. Pediu-se a três alunos que calculassem o valor de $f'(4)$ a partir dos dados da seguinte tabela, onde são apresentados os valores da função f :

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4.2	4.1	4.2	4.5	5.0	5.7

• O aluno A estimou a derivada como $f'(4) \approx \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 0,5$.

• O aluno B estimou a derivada como $f'(4) \approx \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 0,3$.

• O aluno C sugeriu que se deveria dividir a diferença e tomar como estimativa a média dos dois resultados, i.e., $f'(4) \approx \frac{1}{2}(0,5 + 0,3) = 0,4$.

- (a) Esboce o gráfico da f , e indique como as três estimativas são representadas neste gráfico.
- (b) Explique qual resultado deve ser o melhor.
- (c) Use o método do aluno C para encontrar uma fórmula algébrica para aproximar $f'(x)$, usando incrementos de tamanho h .

17. Cada um dos gráficos, na Fig. 2.51, mostra a posição de uma partícula se movimentando ao longo do eixo x como uma função do tempo, $0 \leq t \leq 5$. As escalas verticais dos gráficos são as mesmas. Durante este intervalo de tempo, que partícula tem

- (a) Velocidade constante?
- (b) A maior velocidade inicial?
- (c) A maior velocidade média?
- (d) Velocidade média nula?
- (e) Aceleração nula?
- (f) Aceleração positiva sempre?

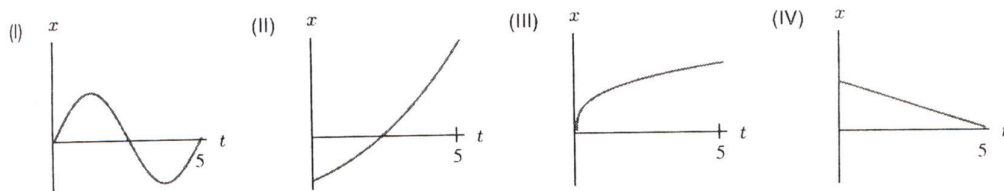


Fig. 2.51

18. Sejam $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = kx^2$, onde k é uma constante.

- (a) Encontre a inclinação da reta tangente ao gráfico da g no ponto $4, 2$.
- (b) Encontre a equação desta reta tangente.
- (c) Se o gráfico da f passa pelo ponto $4, 2$, encontre k .
- (d) Onde é que o gráfico da f intercepta a reta tangente?

19. Um círculo de centro na origem e raio de comprimento $\sqrt{19}$ tem equação $x^2 + y^2 = 19$. Esboce o gráfico do círculo.
- Somente observando o gráfico, o que se pode dizer sobre a inclinação da reta tangente ao círculo no ponto $(0, \sqrt{19})$? E sobre a inclinação da tangente em $(\sqrt{19}, 0)$?
 - Faça uma estimativa para a reta tangente ao círculo, no ponto $(2, -\sqrt{15})$, traçando, cuidadosamente, uma reta tangente neste ponto.
 - Use o resultado do item (b) e a simetria do círculo, para encontrar a inclinação das retas tangentes ao círculo, traçadas nos pontos $(-2, \sqrt{15})$, $(-2, -\sqrt{15})$ e $(2, \sqrt{15})$.

20. Uma pessoa com uma determinada doença no fígado apresenta, no início da doença, concentrações cada vez maiores de determinadas enzimas no sangue (chamadas SGOT e SGPT). À medida que a doença progride, a concentração destas enzimas cai, primeiramente para o nível normal e, eventualmente, para zero (quando a maioria das células do fígado já morreu). O monitoramento do nível destas enzimas permite aos médicos acompanharem o progresso de um paciente com esta doença. Se $C = f(t)$ é a concentração das enzimas no sangue, em função do tempo:

- Esboce um possível gráfico de $C = f(t)$.
- Marque, no gráfico, os intervalos onde $f' > 0$ e onde $f' < 0$.
- Em termos práticos, o que $f'(t)$ representa?

21. O tamanho de uma manada de corças é modelado por

$$P(t) = 4000 + 400 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 180 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

onde t é medido em meses a partir de primeiro de abril.

- Use uma calculadora ou um computador para esboçar um gráfico que mostre como a população varia com o tempo.

Use um gráfico para responder às perguntas que se seguem.

- Quando é que a manada assume seu maior valor? Ela é composta de quantas corças neste instante?
- Quando é que a manada assume seu menor valor? Ela é composta de quantas corças neste instante?
- Quando é que a manada está crescendo de modo mais rápido? Quando é que está diminuindo de modo mais rápido?
- De quanto a manada está crescendo em primeiro de abril?

22. Uma função contínua, definida para todo x , tem as seguintes propriedades:

- f é crescente.
- f é côncava para baixo.
- $f(5) = 2$.
- $f'(5) = \frac{1}{2}$.

- Esboce um possível gráfico para a f .
- Quantos zeros a f tem?
- O que você pode dizer a respeito da localização dos zeros?
- Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$?
- É possível ter $f'(1) = 1$?
- É possível ter $f'(1) = \frac{1}{2}$?

23. Esboce o formato do gráfico de um polinômio quadrático, f , dado que:

- $(1, 3)$ está no gráfico da f .
- $f'(0) = 3, f'(2) = 1, f'(3) = 0$.

24. Esboce o formato do gráfico de um polinômio cúbico, f , dado que:

- $(0, 3)$ está no gráfico da f .
- $f'(0) = 4, f'(1) = 0, f'(2) = -\frac{4}{3}, f'(4) = 4$.