`CM 095 - Análise I`

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

`LISTA 2`

1 Conjuntos finitos, infinitos e enumaráveis

Exercício 1 *Obtenha uma decomposição* $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \ldots$ *tais que* $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ *são infinitos e dois a dois disjuntos.*

Exercício 2 *Dê exemplo de uma sequência decrescente* $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ *de conjuntos infinitos, tais que* $\cap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \emptyset$.

Exercício 3 *Prove que se* X *é infinito então* $\mathcal{P}(X)$ *não é enumerável.*

Exercício 4 *Se* A *é um conjunto enumerável e* B *um conjunto contável, mostre que* $A \cup B$ *é enumerável. Use este fato para mostrar que o conjunto do irracioanis não é enumerável.*

Exercício 5 *Se* X *é finito e* Y *enumerável, então* $\mathcal{F}(X; Y)$ *é enumerável.*

Exercício 6 *Exiba uma bijeção entre* $\mathbb{N}$ *e o conjunto de todos os inteiros pares, maiores que* 13.

Exercício 7 *Exiba uma bijeção entre* $\mathbb{N}$ *e um subconjunto próprio* $X \subset \mathbb{N}$.

Exercício 8 *Sejam* X *um conjunto infinito e* Y *um conjunto finito. Prove que existe uma função sobrejetiva* $f : X \to Y$ *e uma função injetiva* $g : Y \to X$.

Exercício 9 *Prove que todo conjunto* X *de números naturais que é finito e não vazio possui um elemento máximo.*

Exercício 10 *Considerando uma função* $f : X \to Y$, *prove:*

(a) *Se* X *é infinito e* f *injetiva, então* Y *é infinito;*

(b) *Se* Y *é infinito e* f *sobrejetiva, então* X *é infinito;*

Exercício 11 *Suponha que existam duas funções injetivas* $f : \mathbb{N} \to X$ *e* $g : X \to \mathbb{N}$. *Mostre que* X *é enumerável.*

Exercício 12 *Um número real* x *é dito algébrico se existem inteiros* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *não todos nulos, tais que*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável.
Dicas:

(1) *Considere o conjunto* $P^n(\mathbb{Z})$ *dos polinômios de grau* $\leqslant n$, *com coeficientes inteiros;*

(2) *Construa uma bijeção* $\mathbb{Z}^{n+1} \to P^n(\mathbb{Z})$;

(3) *Conclua que o conjunto* $P(\mathbb{Z})$ *dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável.*

(4) *Dado um elemento* $f \in P(\mathbb{Z})$, *associe* f *ao conjunto* R_f *formado por todas as suas raízes.*

(5) *O conjunto dos números algébricos pode ser dado por* $\cup_{f \in P(\mathbb{Z})} R_f$