

LISTA 3

1 Corpos ordenados, supremo e ínfimo.

Exercício 1 *Seja E um subconjunto de um conjunto ordenado S . Suponha que $\alpha \in S$ é uma cota inferior de E e que $\beta \in S$ é uma cota superior de E . Mostre que $\alpha \leq \beta$.*

Exercício 2 *Considere $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente e defina*

$$-A \doteq \{-x; x \in A\}.$$

Prove que $\inf A = -\sup(-A)$.

Exercício 3 *Considere dois números complexos*

$$z = a + bi \quad e \quad w = c + di$$

e defina a relação

$$z < w \doteq \text{se } a < c, \text{ ou } a = c \text{ e } b < d.$$

Verifique que $<$ define uma relação de ordem em \mathbb{C} . Esta relação de ordem é compatível com as operações de soma e produto usuuais de \mathbb{C} ? (Dica: o complexo $z = i$ é um problema.)

Exercício 4 *Suponha que \mathbb{K} seja um corpo e prove as seguintes afirmações.*

- | | | |
|---|--|---|
| (a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$; | (e) $x \neq 0$ e $xy = xz \Rightarrow y = z$; | (i) $0x = 0$; |
| (b) $x + y = x \Rightarrow y = 0$; | (f) $x \neq 0$ e $xy = x \Rightarrow y = 1$; | (j) $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$; |
| (c) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$; | (g) $x \neq 0$ e $xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$; | (k) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$; |
| (d) $-(-x) = x$; | (h) $x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$; | (l) $(-x)(-y) = xy$; |

Exercício 5 *Suponha que \mathbb{K} seja um corpo ordenado e prove as seguintes afirmações.*

- (a) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$, e vice-versa;
- (b) $x > 0$ e $y < z \Rightarrow xy < xz$;
- (c) $x < 0$ e $y < z \Rightarrow xy > xz$;
- (d) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Em particular, $1 > 0$;
- (e) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$;

Exercício 6 Resolva as seguintes equações (em \mathbb{R}) justificando cada operação que você utilizar

(a) $2x + 5 = 8$;

(c) $x^2 = 2x$;

(b) $x^2 - 1 = 3$;

(d) $(x + 2)(x - 1) = 0$;

Exercício 7 Se $a \in \mathbb{R}$ satisfaz $a^2 = a$, prove que $a = 1$ ou $a = 0$;

Exercício 8 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que $a^2 + b^2 = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$;

Exercício 9 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$. Prove que $a^n < b^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$;

Exercício 10 Obtenha o ínfimo e o supremo, caso existam, de cada um dos conjuntos.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}; 2x + 5 > 0\}$;

(c) $C = \{x \in \mathbb{R}; x < 1/x\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R}; x + 2 \geq x^2\}$;

(d) $D = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 2x - 5 < 0\}$;

Exercício 11 Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ contém uma de suas cotas superiores, então esta cota superior é o supremo de A ;

Exercício 12 Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio. Mostre que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma cota superior de A se, e somente se, as condições

$$t \in \mathbb{R} \text{ e } t > \beta$$

implicam em $t \notin A$;

Exercício 13 Sejam A e B subconjuntos limitados de \mathbb{R} .

(a) Mostre que $A \cup B$ é limitado;

(b) Mostre que $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$;

Exercício 14 Sejam A um subconjunto limitado de \mathbb{R} e $A_0 \subset A$, não vazio. Mostre que

$$\inf(A) \leq \inf(A_0) \leq \sup(A_0) \leq \sup(A)$$

Exercício 15 Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios de \mathbb{R} e defina

$$A + B \doteq \{a + b, \forall a \in A \text{ e } b \in B\}$$

(a) Mostre que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;

(b) Mostre que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$;

Exercício 16 Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios de \mathbb{R} e defina

$$A \cdot B \doteq \{a \cdot b, \forall a \in A \text{ e } b \in B\}$$

(a) Se $A, B \subset \mathbb{R}^+$, mostre que $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$;

(b) Se $A, B \subset \mathbb{R}^-$, mostre que $\sup(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$;

(c) Se $A \subset \mathbb{R}^+$ e $B \subset \mathbb{R}^-$, mostre que $\inf(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \inf(B)$;

Exercício 17 *Sejam X um conjunto não vazio e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com $\text{Im}(f)$ um conjunto limitado. Dado $a \in \mathbb{R}$ mostre que*

$$\begin{aligned}\sup\{a + f(x); x \in X\} &= a + \sup\{f(x); x \in X\} \\ \inf\{a + f(x); x \in X\} &= a + \inf\{f(x); x \in X\}\end{aligned}$$

Exercício 18 *Sejam X um conjunto não vazio e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções com $\text{Im}(f)$ e $\text{Im}(g)$ limitados. Mostre que*

$$\begin{aligned}\sup\{f(x) + g(x); x \in X\} &\leq \sup\{f(x); x \in X\} + \sup\{g(x); x \in X\} \\ \inf\{f(x) + g(x); x \in X\} &\geq \inf\{f(x); x \in X\} + \inf\{g(x); x \in X\}\end{aligned}$$

Exercício 19 *Considere os conjuntos $X = Y = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$ e defina a função $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x, y) = 2x + y$.*

(a) *Fixado $x \in X$, obtenha os valores*

$$f(x) \doteq \sup\{h(x, y); y \in Y\};$$

(b) *Obtenha $\inf\{f(x); x \in X\}$;*

(c) *Fixado $y \in Y$, obtenha os valores*

$$g(y) \doteq \inf\{h(x, y); x \in X\};$$

(d) *Obtenha $\sup\{g(y); y \in Y\}$;*

Exercício 20 *Repita o exercício anterior para a função $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < y, \\ 1, & \text{se } x \geq y \end{cases}$$

Exercício 21 *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Defina as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$f(x) \doteq \sup\{h(x, y); y \in Y\} \quad \text{e} \quad g(y) \doteq \inf\{h(x, y); x \in X\}$$

Prove que

$$\sup\{g(y); y \in Y\} \leq \inf\{f(x); x \in X\}$$