CM 095 - Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4

1 Espaços métricos

Exercício 1 *Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexo s com sua estrutura natural de soma e produto. Mostre que $d(w,z) \doteq |w-z|$ define uma métrica em $\mathbb{C}$. Aqui, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, em que $z = a + ib$.*

Exercício 2 *Seja M um conjunto infinito. Dados $p, q \in M$ defina*

$$d(p,q) \doteq \{\ 1, \quad se \quad p \neq q, 0, \quad se \quad p = q.$$

(a) Mostre que $d(p,q)$ define uma métrica;

(b) Quais são os conjuntos abertos de M? Quais são os fechados?

Exercício 3 *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ defina*

(a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$;

(b) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$;

(c) $d_3(x,y) = |x^2-y^2|$;

(d) $d_4(x,y) = |x-2y|$;

(e) $d_2(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$;

Quais destas são métricas em $\mathbb{R}$?

Exercício 4 *Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ e um ponto $p \in \mathbb{M}$. A distância entre o ponto p e o conunto A é defina por*

$$dist(p,A) \doteq \inf\{d(p,x),\ x \in A\}$$

Prove que

(a) $dist(p,A) = 0$ se, e somente se, $p \in \overline{A}$;

(b) Se A é fechado, então para todo $p \in M$ existe $a \in A$ tal que $dist(p,A) = d(p,a)$;

2 Topologia em $\mathbb{R}$

Exercício 5 *Dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, mostre que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$;*

Exercício 6 *Mostre que se $X \subset F$ e F é fechado, então $\overline{X} \subset F$;*

Exercício 7 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos abertos. Mostre que $A+B$ e $A \cdot B$ são conjuntos abertos;*

Exercício 8 *Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, prove que:*

(a) se A é compacto e B fechado, então $A+B$ é fechado;

(b) se A e B são compactos, então $A+B$ e $A \cdot B$ são compactos;

(c) *se A é fechado e B é compacto, então $A \cdot B$ pode não sero compacto;*

Exercício 9 *Mostre que $\mathbb{Z}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$;*

Exercício 10 *Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um conjunto aberto e nem um conjunto fechado de $\mathbb{R}$;*

Exercício 11 *Sejam um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$. Dizemos que p é um ponto de fronteira de A se toda bola aberta centrada em p contém pontos de A e de A^c. O conjunto de todos estes os chamado de fronteira de A e denotado por ∂A.*

(a) *Determine $\partial\mathbb{Q}$;*

(b) *Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \in \mathbb{Q}, \quad e \quad x, y \in [0, 1]\}$. Determine ∂A;*

(c) *Mostre que A é aberto se, e somente se, não possui nenhum dos seus pontos de fronteira;*

(d) *Mostre que A é fechado se, e somente se, $\partial A \subset A$;*

Exercício 12 *Sejam um $A \subset \mathbb{R}$ e A^o o conunto de todos os pontos interiores de A, o qual é chamado de interior de A*

(a) *Mostre que A é um conjunto aberto se, e somente se, $A^o = A$;*

(b) *Mostre que: $A^o \subset A$, $(A^o)^o = A^o$ e $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$;*

(c) *Mostre que $(A \cup B)^o \subset A^o \cup B^o$;*

(d) *Obtenha um A tal que $A^o = \emptyset$;*

Exercício 13 *Dado $A \subset \mathbb{R}$ defina por A^- a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A.*

(a) *Mostre que A^- é um conjunto fechado;*

(b) *Mostre que $x \in A^-$ se, e somente se, $x \in A^o$ ou $x \in \partial A$;*

Exercício 14 *Considere as funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por*

$$f(x) = ax + b\ (a \neq 0),\ g(x) = x^2 \quad e \quad h(x) = x^3.$$

(a) *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $f^{-1}(A)$, $g^{-1}(A)$ e $h^{-1}(A)$ são abertos.*

(b) *O item anterior vale para A fechado?*

(c) *Se A é aberto, então $f(A)$ e $h(A)$ são abertos.*

(d) *Se K é compacto, então são compactos: $f(K)$, $g(K)$, $h(K)$, $f^{-1}(K)$, $g^{-1}(K)$ e $h^{-1}(K)$.*

Exercício 15 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é não enumerável, então A' também é não enumerável;*

Exercício 16 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ então $\overline{A} \setminus A'$ é enumerável (pode também ser finito);*

Exercício 17 *Obtenha uma coleção $\{K_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de compactos de $\mathbb{R}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ não é compacto;*

Exercício 18 *Seja $\{K_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ uma uma coleção de compactos de $\mathbb{R}$ tal que $K_{n+1} \subset K_n$. Prove que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$;*

Exercício 19 *Seja $K \neq \emptyset$ um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Prove que $\inf(K), \sup(K) \in K$;*

Exercício 20 *Obtenha dois conjuntos fechados $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}$ tais que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ e*

$$\inf\{|x_1 - x_2|,\ x_1 \in F_1 \quad e \quad x_2 \in F_2\} = 0;$$