CM 095 - Análise I

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5

1 Sequências em espaços métricos

Exercício 1 *Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$. Mostre que $p \in \overline{A}$ se, e somenete se, existe uma sequência de termos em A convergindo para p;*

Exercício 2 *Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$. Mostre que se A possui ponto de acumulação, então A deve ser um conjunto infinito;*

Exercício 3 *Sejam M um espaço métrico, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequência de Cauchy e defina a sequência real $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por*

$$x_n = d(p_n, q_n).$$

Mostre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$;

Exercício 4 *Considere M um espaço métrico e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Mostre que se uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ coverge para p, então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para p;*

Exercício 5 *Considere o espaço $\mathbb{R}^k$ com a métrica*

$$d(x,y) = ||x-y|| = \left(\sum_{j=1}^{k}(x^j - y^j)^2\right)^{1/2},$$

sendo $x = (x^1, \ldots, x^k)$ e $y = (y^1, \ldots, y^k)$. Os termos de uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^k$ podem ser denotados da seguinte forma:

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k.$$

Mostre que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $p = (p^1, \ldots, p^k)$ se, e somente se, a sequência $\{x_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p^j, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$;

Exercício 6 *Considere em $\mathbb{C}$ a métrica usual $d(z,w) = |z-w|$. Dada uma squência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, podemos escrever*

$$x_n = a_n + ib_n, \ n \in \mathbb{N},$$

com $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$. Mostre que $x_n \to p = a + ib$ se, e somente se

$$a_n \to a \quad e \quad b_n \to p;$$

2 Sequências em $\mathbb{R}$

Exercício 7 *Prove as seguintes igualdades (não precisa ser utilizando a definição de limite):*

(a) $\lim \dfrac{2n+1}{n} = 2$; *(b)* $\lim \dfrac{2n+1}{n+5} = 2$; *(c)* $\lim \dfrac{2n+1}{n^2+1} = 0$;

Exercício 8 *Calcule* $\lim(x_n)$, *sendo* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definda sa seguinte forma:*

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{1+1},\quad x_3 = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\ \ldots,\ x_n = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\cdots+\dfrac{1}{1+1}}}$$

Exercício 9 *Considere a sequência (de Fibonacci)* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definda sa seguinte forma:* $f_1 = 1,\ f_2 = 2$ *e* $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$, *se* $n \geqslant 2$. *Calcule* $\lim(f_{n+1}/f_n)$;

Exercício 10 *Suponha que* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de números reais. Prove que se* x *é convergente, então a sequência* $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *também o é. O contrário é verdadeiro?*

Exercício 11 *Sejam* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências de números reais. Mostre que:*

(a) *se* $x_n \to a$ *e* $x_n \geqslant 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $a \geqslant 0$;

(b) *se* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes, com* $x_n \leqslant y_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$\lim(x_n) \leqslant \lim(y_n);$$

(c) *se existe outra sequência* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfazendo*

$$\lim(x_n) = \lim(z_n) = a \quad e \quad x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

então $\lim(y_n) = a$;

(d) $\lim \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$;

Exercício 12 *Repita os exercícios (1), (2) e (4) considerando* $M = \mathbb{R}$;

Exercício 13 *Mostre que para cada* $a \in \mathbb{R}$ *existe uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de termos racionais convergindo para* a;

Exercício 14 *Sejam* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sequências de Cauchy de números reais. Defina a seguinte relação:*

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (|x_n - y_n|) = 0.$$

Mostre que:

(a) $x \sim x$, *(b)* $x \sim y \ \Rightarrow y \sim x$, *(c)* $x \sim y$ *e* $y \sim z \Rightarrow x \sim z$,

sendo $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de Cauchy;*

Exercício 15 *Sejam* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências (limitadas) de números reais, com*

$$\limsup(x_n) = A,\ \liminf(x_n) = a,\ \limsup(y_n) = B, \quad e \quad \liminf(y_n) = b$$

Mostre que:

(a) $\limsup(x_n + y_n) \leqslant A + B$ *e* $\liminf(x_n + y_n) \geqslant a + b$;

(b) $\limsup(-x_n) = -a$ *e* $\liminf(-y_n) = -A$;

(c) $\limsup(x_n \cdot y_n) \leqslant A \cdot B$ *e* $\liminf(x_n \cdot y_n) \geqslant a \cdot b$;