CM 095 - Análise I

Professor:

**Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

---

LISTA 6

# 1 Sequências Numéricas

**Exercício 1** *Mostre que as seguintes sequências convergem:*

*(a)* $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *se* $|r| \leqslant 1$;

*(b)* $\{1/(1+na)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *se* $a > 0$;

**Exercício 2** *Mostre que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *se, e somente se,* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$;

**Exercício 3** *Mostre que a sequência* $\{1 + (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *não é uma sequência de Cauchy;*

**Exercício 4** *Mostre que a sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *não é limitada, então existe um subsequência* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} 1/x_{n_k} = 0$;

**Exercício 5** *Suponha que* $\lim a_n = \infty$ *e* $\{b_n\}$ *limitada inferiormente, então* $\lim(a_n + b_n) = \infty$;

**Exercício 6** *Suponha que* $\lim a_n = \infty$ *e* $b_n > c > 0$, *então* $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$;

**Exercício 7** *Se* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim(1/a_n) = 0$;

**Exercício 8** *Suponha* $a_n > 0$ *e* $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então*

*(a)* *se* $a_n > c$, *para algum* $c$, *e* $\lim b_n = 0$ *então* $\lim(a_n/b_n) = \infty$;

*(b)* *se* $x_n$ *é limitada e* $\lim b_n = \infty$ *então* $\lim(a_n/b_n) = 0$;

# 2 Séries Numéricas

**Exercício 9** *Mostre que as seguintes séries são convergentes:*

*(a)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$;

*(b)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, *se* $p \geqslant 2$;

*(c)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2+n)$;

*(c)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n!)$;

**Exercício 10** *Mostre que as seguintes séries não são convergentes:*

*(a)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$;

*(b)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, *se* $0 < p \leqslant 1$;

**Exercício 11** *Mostre que se* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *são convergentes, então* $\sum(x_n + y_n)$ *é convergente;*

**Exercício 12** *Suponha que* $\sum x_n$ *seja convergente e* $x_n > 0$. *Definindo* $y_n = (x_1 + \dots x_n)/n$ *mostre que é convergente;*

**Exercício 13** *Suponha que* $\sum x_n$ *seja convergente e* $x_n > 0$. *Definindo* $y_n = (x_1 + \dots x_n)/n$ *mostre que* $\sum y_n$ *é convergente;*

**Exercício 14** *Verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/[(n+1)(n+2)]$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2-n+1)$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, se $p>0$;

**Exercício 15** *Se $\sum x_n$ é convergente e $x_n > 0$, então é verdade que $\sum (x_n)^2$ é convergente?*

**Exercício 16** *Se $\sum x_n$ é convergente e $x_n > 0$, então é verdade que $\sum \sqrt{x_n}$ é convergente?*

## 3 Convergência Absoluta

**Exercício 17** *Demosntre o seguinte resultado:*

***Teorema 1*** *Suponha que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sejam sequências de termos não nulos tais que existe*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n}{y_n}\right|$$

(a) *se $r \neq 0$, então $\sum x_n$ converge absolutamente se, e somente se, $\sum y_n$ converge absolutamente;*

(b) *se $r = 0$, e $\sum y_n$ é absolutamente convergente, então $\sum x_n$ converge absolutamente;*

**Exercício 18** *Demosntre o seguinte resultado:*

***Teorema 2*** *Se $\lim |x_n|^{1/n} < 1$, então $\sum x_n$ converge absolutamente;*

**Exercício 19** *Demosntre o seguinte resultado:*

***Teorema 3*** *Suponha que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de termos não nulos tais que existe*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|.$$

*Se $r < 1$, então $\sum x_n$ converge absolutamente. Se $r > 1$, então $\sum x_n$ diverge;*

**Exercício 20** *Para quais valores $a \in \mathbb{R}$ a série $\sum_{na^n}$ converge?*

**Exercício 21** *Suponha que $\sum (x_n)^2$ e $\sum (y_n)^2$ convergem. Mostre que $\sum x_n y_n$ converge absolutamente;*