CM 095 - Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 7

1 Limites

Exercício 1 *Suponha* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$. *Mostre que* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim_{x\to c} |f(x) - L| = 0$;

Exercício 2 *Considere uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Mostre que* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim_{x\to 0} f(x + c) = L$;

Exercício 3 *Considere uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *tais que* $\lim_{x\to c}(f(x))^2 = L$.

(a) Mostre que se $L = 0$, *então* $\lim_{x\to c} f(x) = 0$;

(c) Obtenha um exemplo em que $L \neq 0$ *e não exista* $\lim_{x\to c} f(x)$;

Exercício 4 *Sejam* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$. *Suponha que* f *seja limitada numa vizinhança de* c *e que* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$. *Mostre que* $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$;

Exercício 5 *Sejam* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$.

(a) Mostre que se existem os limites $\lim_{x\to c} f(x)$ *e* $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x))$, *então existe* $\lim_{x\to c} g(x)$;

(c) O mesmo vale para o produto?

Exercício 6 *Considere as funções reais*

$$f(x) = x + 1 \quad e \quad g(x) = \begin{cases} 2, & se \quad x \neq 1, \\ 0, & se \quad x = 1 \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x\to 1} g(f(x))$ *e compare com* $g\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right)$;

(c) Calcule $\lim_{x\to 1} f(g(x))$ *e compare com* $f\left(\lim_{x\to 1} g(x)\right)$;

2 Funções Contínuas

Exercício 7 *Sejam* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *uma função e* $p \in \mathbb{R}$.

(a) Obtenha uma definição para " F é contínua no ponto p";

(b) Escrevendo $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, *sendo* $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *mostre que* F *é contínua em* p *se, e somente se, cada uma das* f_j *é contínua em* p;

(c) Mostre que uma função linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é contínua em* $\mathbb{R}^n$;

Exercício 8 *Suponha que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça a seguinte propriedade: Existe um $M > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$;

Exercício 9 *Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

(a) *Mostre que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$;*

(b) *Se $Z(f)$ denota o conjunto de zeros de f, então $Z(f)$ é fechado;*

(c) *Suponha f sobrejetiva e e A é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$, mostre então $f(A)$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é outra função contínua e sobrejetiva. Mostre que se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, então $f = g$;*

(d) *Suponha que $f(r) = 0$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;*

Exercício 10 *Considere o intervalo $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e uma função contínua $f : I \to I$. Mostre que existe $c \in I$ tal que $f(c) = c$;*

Exercício 11 *Sejam $a < b < c$ e duas funçõe contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [b,c] \to \mathbb{R}$, tais que $f(b) = g(b)$. Mostre que a função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in [a,b], \\ g(x), & se \quad x \in [b,c] \end{cases}$$

é contínua em $[a,b]$;

Exercício 12 *Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}.$$

É possível definir f em $x = 2$ de modo que f seja contínua?

Exercício 13 *Mostre que a função $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ é contínua;*

Exercício 14 *Verifique em quais pontos as seguintes funções são contínuas*

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + |\sin(x)|}}{x}$, $x \neq 0$;

Exercício 15 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita aditiva se $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que se f é contínua num ponto $a \in \mathbb{R}$, então ela é contínua em todo $\mathbb{R}$;*

Exercício 16 *Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte propriedade*

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) *Mostre que se f é contínua em $x = 0$, então é contínua em $\mathbb{R}$;*

(b) *Em particular, se $f(a) = 0$, para algum $a \in \mathbb{R}$, então $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;*

Exercício 17 *Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \leqslant \alpha\}$ é fechado, seja qual for o número $\alpha \in \mathbb{R}$;*