

LISTA AVALIATIVA 1: Entregar dia 12 de setembro

Exercício 1 Dada uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, considere os conjuntos

$$\limsup A_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \quad e \quad \liminf A_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

- (a) Prove que $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n ;
- (b) Prove que $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todo A_n , salvo para uma quantidade finita de valores de n ;

Exercício 2 Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios de \mathbb{R} e defina

$$A + B \doteq \{a + b, \forall a \in A \text{ e } b \in B\}$$

- (a) Mostre que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;
- (b) Mostre que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$;

Exercício 3 Mostre que os seguintes conjuntos são enumeráveis.

- (a) \mathbb{Q}
- (b) $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
- (c) \mathbb{Q}^k , para cada $k \in \mathbb{N}$. (Dica: use indução)

Exercício 4 Supondo que \mathbb{R} satisfaz a propriedade do ínfimo, prove que \mathbb{R} satisfaz a propriedade do supremo.