CM 095 - Análise I

Professor:

**Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

---

# LISTA AVALIATIVA 3: Entregar dia 9 de janeiro

**Exercício 1** *Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$, para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0)x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

**Exercício 2** *Denote por $Df(c)$ a derivada da função $f$ no ponto $c$. Considere uma nova definição de derivada $D^*f$ dada por*

$$D^*f(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f^2(c+h) - f^2(c)}{h},$$

*onde $f^2(x)$ denota $(f(x))^2$.*

*(a) Mostre que se existem $D^*f(c)$ e $D^*g(c)$, então existem $D^*(f+g)(c)$ e $D^*(f \cdot g)(c)$;*

*(b) Qual a relação entre $Df(c)$ e $D^*f(c)$, supondo que ambos existem;*

*(c) Quais funções satisfazem a igualdade $D^*f(c) = Df(c)$?*

**Exercício 3** *Considere $a$ e $c$ números reais, com $C > 0$, e a $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\dfrac{1}{|x|^c}\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

*Prove as seguintes afirmações*

*(a) $f$ é contínua se, e somente se, $a > 0$;*

*(b) $f'(0)$ existe se, e somente se, $a > 1$;*

**Exercício 4** *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \sin(x)$.*

*(a) Mostre que existe $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leqslant K$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$;*

*(b) Prove que, para $x \in \mathbb{R}$ vale:*

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

**Exercício 5** *Considere um número positivo $P$. Prove que dentre todos os números positivos $x, y$ tais que $xy = P$, a soma $x + y$ é a menor possível quando $x = y = \sqrt{P}$;*