CM 095 - Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

PRIMEIRA PROVA - 14/09/16

- Resultados provados em sala podem ser utilizados. Você deve deixar claro onde está usando cada um destes resultados;

---

1 Obrigatórios

Exercício 1 *(2 pontos) Dada uma família de conjuntos* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *defina*

$$F_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se $x \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n$*, então existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x \in A_n$*, para todo* $n \geqslant n_0$*.*

Exercício 2 *(2 pontos)*

(a) *Prove que* $n^2 + n + 2$ *é um número par, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$*. Conclua que* $n^3 + 5n$ *é divisível por 6, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$*;*

(b) *Suponha que* A *e* B *são dois conjuntos enumeráveis. Mostre que, se* $A \cap B$ *é infinito, então* $A \cap B$ *deve ser enumerável;*

Exercício 3 *(2 pontos) Sejam* A *um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}$ *e* $A_0 \subset A$*, não vazio.*

(a) *Justifique a seguinte afirmação: existem os números reais* $\inf(A_0)$ *e* $\sup(A_0)$*;*

(b) *Mostre que* $\inf(A) \leqslant \sup(A_0)$*;*

2 Resolva apenas duas

Exercício 4 *(2 pontos) Fixado um número irracional* $\alpha > 0$*, defina o conjunto*

$$\alpha \cdot \mathbb{Q} \doteq \{\alpha r, \ r \in \mathbb{Q}\}.$$

Prove que $\alpha \cdot \mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$*.*

Exercício 5 *(2 pontos) Sejam* A *e* B *subconjuntos enumeráveis de* $\mathbb{R}$ *e defina*

$$C \doteq A + B = \{a + b, \ a \in A \ \ e \ \ b \in B\}.$$

Supondo que C *é infinito, mostre que ele é enumerável. (Dica: obter uma função sobrejetiva, conveniente, definida em* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*)*

Exercício 6 *(2 pontos) Supondo que* $\mathbb{R}$ *satifaz a propriedade do supremo, prove que* $\mathbb{R}$ *satisfaz a propriedade do ínfimo;*