CM 095 - Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

SEGUNDA PROVA - 9/11/16

- Resultados provados em sala podem ser utilizados. Você deve deixar claro onde está usando cada um destes resultados;

---

1 Obrigatórios

Exercício 1 *(4 pontos) Determine quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas. Para as verdadeiras você deve exibir uma prova e para as falsas um exemplo.*

(a) A união de dois conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ resulta num conjunto aberto;

(b) Se um subconjunto de $\mathbb{R}$ não é fechado, então ele é aberto;

(c) Se uma sequência de números reais $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero, então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é convergente;

(d) Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade de $g(x) = f(x) \cdot f(x)$ ser contínua, então f é contínua;

Exercício 2 *(2 pontos) Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reais, com $a_n \neq 0$, e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

(a) Mostre que f é contínua (ϵ's e δ's não é uma boa ideia);

(b) Mostre que se n é ímpar, então existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$;

2 Resolva apenas duas

Exercício 3 *(2 pontos) Mostre que toda sequência de números reais que converge é uma sequência de Cauchy;*

Exercício 4 *(2 pontos) Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Suponha que $g(x) \neq 0$, para todo $x \in A$ e que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad \text{sendo} \quad a \in A.$$

Mostre que se L é positivo, então existe uma vizinhança de a na qual f e g possuem mesmo sinal;

Exercício 5 *(2 pontos) Mostre que a relação*

$$x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n, \quad \text{para cada} \quad x \in (0,1),$$

define uma função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$.