CM 095 - Análise I
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

TERCEIRA PROVA - 11/01/17

- Resultados provados em sala podem ser utilizados. Você deve deixar claro onde está usando cada um destes resultados;

---

1 Obrigatórios

Exercício 1 *(2 pontos) Verifique a validade das afirmações abaixo (se for verdadeira exiba uma prova e, caso seja falsa, um exemplo.*

(a) Uma função que é diferenciável num ponto x_0 de seu domínio é contínua neste ponto;

(b) Uma função que é contínua num ponto x_0 de seu domínio é diferenciável neste ponto;

Exercício 2 *(2 pontos) Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$, para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0)x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exercício 3 *(2 pontos) Considere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais e a função f definida em $\mathbb{R}$ por*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (a_j - x)^2.$$

(a) Mostre que existe $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(b) Mostre que $x_0 = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_j$ é ponto de mínimo de f.

2 Resolva apenas duas

Exercício 4 *(2 pontos) Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant c, \\ ax + b, & x > c. \end{cases} \qquad (\ a,\ b,\ e\ c \text{ constantes })$$

Obtenha os valores de a e b (em termos de c) tais que exista $f'(c)$.

Exercício 5 *(2 pontos) Suponha f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b).*

(a) Mostre que se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é uma função constante;

(b) Mostre que se $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$.

Exercício 6 *(2 pontos) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \cos(x)$.*

(a) Mostre que existe $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leqslant K$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) Supondo que f é infinitamente diferenciável, justifique a igualdade

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ \forall x \in \mathbb{R};$$