CM 095 - Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2

1 Indução

Exercício 1 *Demonstre os seguintes fatos:*

(a) $2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n(n + 1)$;

(b) $1 + 2 + 3 + \ldots + (2n+) = (n + 1)^2$;

(c) $(a - 1)(1 + a + \ldots a^n) = a^{n+1} - 1$, *dado* $a \in \mathbb{N}$;

(d) $n \geqslant 4 \Rightarrow n! > 2^n$;

(e) $n^3 + 5n$ *é divisível por 6;*

(f) $n < 2^n$;

Exercício 2 *Dados os números naturais* a, b, *prove que existe um número natural* m *tal que* $ma > b$.

Exercício 3 *Um elemento* $a \in \mathbb{N}$ *chama-se antecessor de* $b \in \mathbb{N}$ *se* $a < b$ *e não existe* $c \in \mathbb{N}$ *tal que* $a < c < b$. *Prove que, exceto o* 1, *todo número natural possui um antecessor.*

Exercício 4 *Seja* X *um conjunto com* n *elementos. Prove que o conjunto das bijeções* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *possui* $n!$ *elementos.*

Exercício 5 *Dado um conjunto finito* X, *prove que uma função* $f : X \to X$ *é injetiva se, e somente se, é bijetiva.*

Exercício 6 *Sejam* X *e* Y *conjuntos finitos. Prove que*

$$card(X \cup Y) = card(X) + card(Y) - card(X \cap Y).$$

Exercício 7 *Prove que se* A *tem* n *elementos, então* $\mathcal{P}(A)$ *tem* 2^n *elementos.*

Exercício 8 *Considere a sequência* $\{x_n\}$ *definida da seguinte forma:* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ *e*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Use o Princípio da Indução Forte para mostrar que $1 \leqslant x_n \leqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercício 9 *Prove a fómula binomial: dados* $a, b \geqslant 0$ *e qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *temos*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n-k}, \quad sendo \ \binom{k}{n} = \frac{n!}{(n - k)!k!}.$$