CM 095 - Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3

1 Conjuntos finitos, infinitos e enumaráveis

Exercício 1 *Obtenha uma decomposição* $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \ldots$ *tais que* $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ *são infinitos e dois a dois disjuntos.*

Exercício 2 *Dê exemplo de uma sequência decrescente* $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ *de conjuntos infinitos, tais que* $\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \emptyset$.

Exercício 3 *Prove que se* X *é infinito então* $\mathcal{P}(X)$ *não é enumerável.*

Exercício 4 *Se* A *é um conjunto enumerável e* B *um conjunto contável, mostre que* $A \cup B$ *é enumerável. Use este fato para mostrar que o conjunto do irracioanis não é enumerável.*

Exercício 5 *Se* X *é finito e* Y *enumerável, então* $\mathcal{F}(X;Y)$ *é enumerável.*

Exercício 6 *Sejam* X *e* Y *dois conjuntos finitos. Prove que*

$$card(X \cup Y) + card(X \cap Y) = card(X) + card(Y)$$

Exercício 7 *Exiba uma bijeção entre* $\mathbb{N}$ *e o conjunto de todos os inteiros pares, maiores que* 13.

Exercício 8 *Exiba uma bijeção entre* $\mathbb{N}$ *e um subconjunto próprio* $X \subset \mathbb{N}$.

Exercício 9 *Sejam* X *um conjunto infinito e* Y *um conjunto finito. Prove que existe uma função sobrejetiva* $f : X \to Y$ *e uma função injetiva* $g : Y \to X$.

Exercício 10 *Prove que todo conjunto* X *de números naturais que é finito e não vazio possui um elemento máximo.*

Exercício 11 *Considerando uma função* $f : X \to Y$, *prove:*

(a) *Se* X *é infinito e* f *injetiva, então* Y *é infinito;*

(b) *Se* Y *é infinito e* f *sobrejetiva, então* X *é infinito;*

Exercício 12 *Suponha que existam duas funções injetivas* $f : \mathbb{N} \to X$ *e* $g : X \to \mathbb{N}$. *Mostre que* X *é enumerável.*

Exercício 13 *Suponha que* A_m *é um conjunto enumerável, para cada* $m \in \mathbb{N}$. *Mostre que o conjunto*

$$A = \cup_{m\in\mathbb{N}} A_m$$

é enumerável. Dicas:

- *para cada* m *existe bijeção* $\varphi_m : \mathbb{N} \to A_m$;
- *defina* $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ *pondo* $\beta(m,n) = \varphi_m(n)$;
- *mostre que* β *é sobrejetiva;*