CM 095 - Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Diferenciabilidade - II

Exercício 1 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *no intervalo* I*. Suponha que exista* $K > 0$ *tal que* $|f^{(n)}(x)| \leqslant K$ *para todo* $x \in I$ *e para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Prove que, para* $x, x_0 \in I$ *vale*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Exercício 2 *Dê uma demosntração de que* $f'' \geqslant 0$ *implica* f *convexa usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.*

Exercício 3 *Seja* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um polinômio de grau* n*. Prove que para todo* $a, x \in \mathbb{R}$ *vale para* $x, x_0 \in I$ *vale*

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exercício 4 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *considere* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Suponha que, para cada* $x \in I$*, a sequência* $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ *seja convergente. Prove que a função* $f : I \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

é convexa. Prove um resultado análogo para funções côncavas.

Exercício 5 *Suponha* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua convexa tal que* $f(a) < 0 < f(b)$*. Prove que existe único* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

Exercício 6 *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *chama-se contração quando existe uma constante* $k \in [0, 1)$ *tal que* $|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$*, para todo* $x, y \in X$*.*

(a) *Mostre que se* f *é derivável no intervalo* I *e* $|f'(x)| \leqslant k < 1$ *então* f *é uma contração.*

(b) *Suponha que* $X \subset \mathbb{R}$ *é fechado e* $f : X \to X$ *é uma contração. Mostre que, fixado* $x_0 \in X$*, a sequência*

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ \ldots, \ x_{n+1} = f(x_n)$$

converge para um ponto $a \in X$ *tal que* $f(a) = a$*;*

(c) *Prove que toda contração* $f : X \to X$*,* $X \subset \mathbb{R}$ *fechado, possui único pointo fixo, isto é, existe único* $a \in X$ *tal que* $f(a) = a$*;*

Exercício 7 *Prove que* $1,0754$ *é um valor aproximado, com 4 algarismos, da raiz positiva da equação* $x^6 + 6x - 9 = 0$*;*

Exercício 8 *Considere a função* $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ *dada por* $x - x^3$ *a qual anula-se em* $x = 0$*. Aplique o método de Newton começando com* $x_0 = \sqrt{5}/5$*;*